DAFTAR ISI

Defenisi 1

Misalkan G suatu himpunan yang tak kosong dan $*$ suatu operasi yang dodefenisikan dengna G. G disebut membentuk grup terhadap operasi *

yang ditulis sebagai (G, $*$) jika :

1. Setiap $a, b \in G$ berlaku $a * b \in G$ (G tutup terhadap operasi $*$)
   Kita misalkan a dan b adalah suatu anggota himpunan tak kosong, maka a da b tertutup terhadap bilnagan bulat Z bila a * b $\in Z$
2. Setiap $a, b, c \in G$ berlaku $a * (b * c) \in G = (a * b) * c$ (G asosiatif terhadap operasi $*$)
   Dalam sifat asosiatif (a*b) * c = a* (b*c)
3. Ada suatu unsur di G yang dilambangkan dengan e sehingga setiap
   $a \in G$ berlaku :
   - $a * e = a$
   - $e * a = a$
   - a * e = e * a = a

   (G mempunyai vektor identitas terhadap operasi $*$)
4. Setiap $a \in G$ ada b $\in G$ sehingga :
   - $a * b = e$
   - $b * a = e$

   Dalam hal ini b disebut invers dari a yang ditulis sebagai a^{-1}. (Setiap unsur di G mempunyai invers terhadap operasi $*$

Contoh 1

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| \, a, b, c, d \in R \right\}$$

Periksa apakah G membentuk grup terhadap operasi penjumlahan matriks.

Penyelesaian :

1. Kita Ambil $x, y \in G$ dan akan ditunujukkan bahwa $x + y \in G$

Karena $x, y \in G$ dan $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| \, a, b, c, d \in R \right\}$, maka

$x = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}$, y = $\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$ untuk suatu karena variabelnya ada 2,maka penjumlahannya sampai 2 juga.

$a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2, d_1, d_2 \in R$ Perhatikan bahwa :

$$x + y = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 & d_2 + d_2 \end{pmatrix}$$

Karena $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2, d_1, d_2 \in R$, maka $a_1, +a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2, d_1 + d_2 \in R$

$\therefore x + y \in G$

2. Ambil $x, y, z \in G$ adt $(x + y) + z = x + (y + z)$

Karena $x, y, z \in G$ dan $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| \, a, b, c, d \in R \right\}$, maka

X=$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}$, y= $\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$ $z = \begin{pmatrix} a_3 & b_3 \\ c_3 & d_3 \end{pmatrix}$untuk suatu

$a_i, b_i, c_i, d_i \in R, i = 1,2,3$

Kita perhatikan bahwa karena variabelnya ada 3 maka penjumlahnnya sampai 3

$$(x + y) + z = \left(\begin{pmatrix} a1 & b1 \\ c1 & d1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a2 & b2 \\ c2 & d2 \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} a3 & b3 \\ c3 & d3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a1 \; +a2 & b1 + \; b2 \\ c1 \; +c2 & d1 + \; d2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a3 & b3 \\ c3 & d3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (a1 + \; a2) + a3 & (b1 + b2 + b3 \\ (c1 + \; c2) + c3 & (d1 + d2) + d3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a1 + \; (a2 + a3) & b1 + (b2 + b3) \\ c1 + \; (c2 + c3\,) & d1\,(d2 + d3) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a1 & b1 \\ c1 & d1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a2 + \; a3 & b2 + \; b3 \\ c2 + \; c3 & d2 + \; d3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a1 & b1 \\ c1 & d1 \end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix} a2 & b2 \\ c2 & d2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a3 & b3 \\ c3 & d3 \end{pmatrix} \right)$$

$$= x + (y + z)$$

$\therefore$ terbukti bahwa $(x + y) + z = x + (y + z)$ dengan menggunakan sifat asosiatif

3. Adt $e \in G$ sehingga setiap $x \in G$, berlaku $x + e = x \; dan \; e + x = x$

Pilih :

$e \quad = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \qquad G$

Ambil $x \in G$ adt $x + e = x \; dan \; e + x = x$

Karena Karena $x \in G$ dan $G \;=\; \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| \; a, b, c, d \right\}, \in R$ maka

$x = \begin{pmatrix} a1 & b1 \\ c1 & d1 \end{pmatrix}$ untuk suatu a1,b1,c1,dan d1

Kita lihat bahwa $x + e = x$ dan $e + x = x$

untuk suatu $a_1, b_1, c_1, d_1 \in R$

4. Ambil $x \in G$ adt ada y$\in G$ sehingga $x + y = e \; dan \; y + x = e$

Karena $x, y, z \in G$ dan, $\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| \; a, b, c, d \;\; \in R \right\}$ maka

$x \;=\; \begin{pmatrix} a1 & b1 \\ c1 & d1 \end{pmatrix}$ untuk suatu a1,b1,c1, dan d1 $\in R$

Pilih , $y = \begin{pmatrix} -a1 & -b1 \\ -c1 & -d1 \end{pmatrix}$, karena a1,b1,c1, dan d1 $\epsilon \; R$ maka

-a1,-b1,-c1,-d1 $\in R$ ini berarti,

$x + y = \begin{pmatrix} a1 & b1 \\ c1 & d1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a1 & -b1 \\ -c1 & -d1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a1 + & (-a1) & b1 + & (-b1) \\ c2 + & (-c1) & d1 + & (-d1) \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \; e$

$y + x = \begin{pmatrix} -a1 & -b1 \\ -c1 & -d1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a1 & b1 \\ c1 & d1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-a1) + & a1 & (-b1) + & b1 \\ (-c1) + & c1 & (-d1) + & d1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = e$

Karena 1,2,3,4 maka $(G, +)$ suatu grup

Contoh 2

Periksa apakah $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots\ldots\}$ membentuk grup terhadap operasi kali

Penyelesaian : $\mathbb{Z}$ tidak membentuk grup terhadap operasi kali karena ada $z \in \mathbb{Z}$ tetapi $z^{-1} \in \mathbb{Z}$

Contoh 3

$\mathbb{Z}_6 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$

Setiap $\bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{Z}_6$ didefenisikan operas $+_6$ sebagai berikut :

$\bar{a} +_6 \bar{b} = \bar{c}$ adalah sisa dari $a + b$ setelah dibagi 6

Periksa apakah $\mathbb{Z}_6$ membentuk grup terhadap $+_6$

$+_6$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{5}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$

Cara menggunakan table cayley adalah dengan menuliskan terlebih dahulu angka yang telah ditetapkan dan apabila semua angka tadi telah ditulis,maka penulisan selanjutnya diulang lagi dari awal.

1. Dari tabel penjumlahan $+_6$ dapat disimpulkan bahwa setiap $x, y \in \mathbb{Z}_6$ berlaku $x +_6 y \in \mathbb{Z}_6$
2. Dengan menggunakan tabel penjumlahan $+_6$ dapat ditunjukan bahwa $x, y \in \mathbb{Z}_6$ berlaku $x +_6 (y +_6 z) = (x +_6 y) +_6 z$, contoh :

$$x = \bar{2}, y = \bar{3}, z = \bar{5}$$

$$x +_6 (y +_6 z) = \bar{2} +_6 (\bar{3} +_6 \bar{5})$$

$$= \bar{2} +_6 \bar{2} = \bar{4}$$

$$(x +_6 y) +_6 z = (\bar{2} +_6 \bar{3}) +_6 \bar{5}$$

$$= \bar{5} +_6 \bar{5} = \bar{4}$$

3. Dari tabel penjumlahan $+_6$ terlihat bahwa $\bar{0}$ berperan sebagai unsur identitas. Jadi ada $e = \bar{0} \in \mathbb{Z}_6$ sehingga setiap $x \in \mathbb{Z}_6$ berlaku $x +_6 e = x \text{ dan } e +_6 x = x$
4. Dari tabel penjumlahan $+_6$ diperoleh :

$$\bar{0}^{-1} = \bar{0} \qquad \bar{2}^{-1} = \bar{4} \qquad \bar{4}^{-1} = \bar{2}$$

$$\bar{1}^{-1} = \bar{5} \qquad \bar{3}^{-1} = \bar{3} \qquad \bar{5}^{-1} = \bar{1}$$

Karena 1,2,3 dan 4 maka $(\mathbb{Z}_6, +_6)$ suatu grup

Contoh 4

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \mid a, d \in R, ad \neq 0 \right\}$$

Periksa apakah G membentuk grup terhadap operasi perkalian matriks.

Penyelesaian :

R1. Ambil $x, y \in G$ adt $xy \in G$

Karena $x, y \in G$ dan $G = \left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \mid a, d \in R, ad \neq 0\right\}$maka,

$$x = \left\{\begin{pmatrix} a1 & 0 \\ 0 & d1 \end{pmatrix} \mid a1, d1 \in R, ad \neq 0\right\}$$

$$y = \left\{\begin{pmatrix} a2 & 0 \\ 0 & d2 \end{pmatrix} \mid a2, d2 \in R, ad \neq 0\right\}$$

Perhatikan bahwasanya :

$$xy = \begin{pmatrix} a1 & 0 \\ 0 & d1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a2 & 0 \\ 0 & d2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a1\,.a2 + & 0.0 & a1.0 & +0.d2 \\ 0.a2 + & d1.0 & 0.0 & +d1.d2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a1.a2 & 0 \\ 0 & d1d2 \end{pmatrix}$$

Ini berarti $x, y \in G$

Karena $x, y, z \in G$ dan $G = \left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \mid a, d \in R \neq 0\right\}$, maka

$x = (a0^1d^0{}_1)$, $y = ({}^a0^2d^0{}_2)$, $z = ({}^a0^3d^0{}_3)$ untuk suatu a_i, $d_i \in$

$R, i = 1,2,3, \ldots$

Perhatikan bahwa :

$$(xy)z = \left(\begin{pmatrix} a1 & 0 \\ 0 & d1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a2 & 0 \\ 0 & d2 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} a3 & 0 \\ 0 & d3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a1.a2 + 0{,}0 & a1{,}0 + 0.d2 \\ 0{,}a2 + d1.0 & 0.0 + d1.d2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a3 & 0 \\ 0 & d3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a1.a2 & 0 \\ 0 & d1.d2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a3 & 0 \\ 0 & d3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (a1.a2)a3 + (a1.a2).0 & (a1.a2).0 + 0.d3 \\ 0.a3 + (d1.d2).0 & 0.0 + (d1.d2)d3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a1(a2.a3) + a1(a2.0) & a1.(a2\,.0) + 0.d3 \\ 0.a3 + (d1.d2).0 & 0.0 + (d2.d3) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a1 & 0 \\ 0 & d1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a2.a3 + 0.0 & a.2.0 + 0.d3 \\ 0.a3 + d2.0 & 0.0 + d2.d3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a1 & 0 \\ 0 & d1 \end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix} a2 & 0 \\ 0 & d1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a3 & 0 \\ 0 & d3 \end{pmatrix}\right)$$

$$= x\,(yz)$$

3. Adt $e \in G$ sehingga setiap $x \in G$ berlaku $xe = x\ dan\ ex = x$ Pilih :

   eG

   Ambil $x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in$ $\in G$ adt $xe = x\ dan\ ex = x$

Karena $x \in G$ dan $G\left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \mid a, d \in R, ad \neq 0\right\}$ maka

$x = \begin{pmatrix} a1 & 0 \\ 0 & d1 \end{pmatrix}$untuk suatu $a_1, d_1 \in R$ Perhatikan bahwa :

$$xe = \begin{pmatrix} a1 & 0 \\ 0 & d1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a1+0 & 0 \\ 0 & d1+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a1 & 0 \\ 0 & d1 \end{pmatrix} = x$$

$$ex = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a1 & 0 \\ 0 & d1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a1+0 & 0 \\ 0 & d1+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a1 & 0 \\ 0 & d1 \end{pmatrix} = x$$

4. Ambil $x \in G$ adt $y \in G$ sehingga $xy = e\ dan\ yx = e$

Misalkan $x = \begin{pmatrix} a1 & 0 \\ 0 & d1 \end{pmatrix}$ untuk suatu a1,d1,$\in R$

Pilih y=$\begin{pmatrix} 1/a1 & 0 \\ 0 & 1/d1 \end{pmatrix}$, karena a1,d1 $\in R$

Maka dari itu y $\in G$

$$yx = \begin{pmatrix} 1/a1 & 0 \\ 0 & 1/d1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a1 & b1 \\ c1 & d1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a1/a1 & 0 \\ 0 & d1/d1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = e$$

$\therefore$ Dari 1,2,3,4 maka $(G,*)$ suatu grup

Contoh 5

Diketahui $\mathbb{Z}_7 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}\}$

$\mathbb{Z}_7 - \{\bar{0}\} = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}\}$

$\times_7$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{6}$	$\bar{1}$	$\bar{3}$	$\bar{5}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{6}$	$\bar{2}$	$\bar{5}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$
$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{1}$	$\bar{5}$	$\bar{2}$	$\bar{6}$	$\bar{3}$
$\bar{5}$	$\bar{5}$	$\bar{3}$	$\bar{1}$	$\bar{6}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\bar{6}$	$\bar{6}$	$\bar{5}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

Table cayley yang perkalian ini juga sama cara kerjanya dengan yang penjumlahan.

1. Dari tabel perkalian $\times_7$ dapat disimpulkan bahwa setiap $x, y \in \mathbb{Z}_7 - \{0\}$ berlaku $x \times_7 y \in \mathbb{Z}_7 - \{\bar{0}\}$
2. Dengan menggunakan tabel perkalian $\times_7$ dapat ditunjukkan bahwa $x, y, z \in \mathbb{Z}_7 - \{\bar{0}\}$ berlaku $x \times_7 (y \times_7 z) = (x \times_7 y) \times_7 z$

   Contoh : $\bar{3} \times_7 (\bar{4} \times_7 \bar{5}) = \bar{3} \times_7 \bar{6} = \bar{4}$
3. Dari tabel perkalian $\times_7$ terlihat bahwa $\bar{1}$ berperan sebagai unsur

identitas. Jadi, $e = \bar{1} \in \mathbb{Z}_7 - \{\bar{0}\}$ sehingga setiap $\in x \in \mathbb{Z}_7 - \{\bar{0}\}$ berlaku $x \times_7 e = x$ $dan\ e \times_7 x = x$

4. Dari tabel perkalian $\times_7$ terlihat bahwa :

$\bar{1}^{-1} = \bar{1}$ $\quad \bar{3}^{-1} = \bar{5}$ $\quad \bar{5}^{-1} = \bar{3}$

$\bar{2}^{-1} = \bar{4}$ $\quad \bar{4}^{-1} = \bar{2}$ $\quad \bar{6}^{-1} = \bar{6}$

$\therefore$ Dari 1,2,3,4 dapat disimpulkan bahwa $\mathbb{Z}_7 - \{\bar{0}\}, \times_7$ adalah suatu grup

Contoh 6

$S = \{12,3\}$, definisikan pemetaan satu-satu dan pada dari S ke S yaitu f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6 sebagai berikut.

Bentuk 1	Bentuk 2	Bentuk 3
$f_1(1) = 1, f_1(2) = 2, f_1(3) = 3$ atau f_1: S→ S $1 \mapsto 1$ $2 \mapsto 2$ $3 \mapsto 3$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ & 2 & \\ 1 & & 3 \end{pmatrix}$	[1,2,3]
$f_2(1) = 1, f_2(2) = 3, f_2(3) = 2$ atau f_2: S→ S $1 \mapsto 1$ $2 \mapsto 3$ $3 \mapsto 2$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ & 3 & \\ 1 & & 2 \end{pmatrix}$	[1,3,2]
$f_3(1) = 2, f_3(2) = 1, f_3(3) = 3$ atau f_3: S→ S $1 \mapsto 2$ $2 \mapsto 1$ $3 \mapsto 3$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ & 1 & \\ 2 & & 3 \end{pmatrix}$	[2,1,3]
$f_4(1) = 2, f_{34}(2) = 3, 4(3) = 1$ atau f_4: S→ S $1 \mapsto 2$ $2 \mapsto 3$ $3 \mapsto 1$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ & 3 & \\ 2 & & 1 \end{pmatrix}$	[2,3,1]

$f_5(1) = 3, f_{35}(2) = 1, f_5(3) = 2$ atau f_5: S→ S 1↦ 3 2 ↦ 1 3 ↦ 2	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	[3,1,2]
$f_6(1) = 3, f_6(2) = 2, f_6(3) = 1$ atau f_6: S→ S 1↦ 3 2 ↦ 1 3 ↦ 2	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	[3,2,1]

Cara pemakaian table ini adalah melihat s→ $s/\ f_s\ (s) = s$

$Tulis\ S_3 = \{f: s \to S \mid f : satu\ satu\ dan\ pada\}$

$= \{f1, f2, f3, f4, f5, f6\}$

= {[1,2,3], [1,3,2], [2,1,3], [2,1,3], [3,1,2], [3,2,1]}

Tunjukkan bahwa S_3 membentuk grup terhadap operasi komposisi fungsi ∘ Penyelesaian : Isi terlebih dahulu tabel hasil komposisi fungsinya, lihat contoh berikut.

(1). [3,1,2]∘[2,3,1] = $f_5 \circ f_4$?

Misalkan [3,1,2]∘[2,3,1] = g, maka g(1) = [3,1,2]∘[2,3,1](1) = ($f_5 \circ f_4$)(1) = f_5 (f_4(1)) =

f_5(2) = 1 g(2) = [3,1,2]∘[2,3,1](2) = ($f_5 \circ f_4$)(2) = f_5 (f_4(2)) = f_5(3) = 2

g(3) = [3,1,2]∘[2,3,1](2) = ($f_5 \circ f_4$)(3) = f_5 (f_4(3)) = f_5(1) = 3

Ini berarti, g: S→ S atau g = f_1= [1,2,3]

1↦ 1
2↦ 2
3↦ 3

(2). [2,3,1]∘[1,3,2] = $f_4 \circ f_2$?

Misalkan [2,3,1]∘[1,3,2] = g, maka g(1) = [2,3,1]∘[1,3,2](1) = ($f_4 \circ f_2$)(1) = f_4 (f_2(1)) =

f_4(1) = 2 g(2) = [2,3,1]∘[1,3,2](2) = ($f_4 \circ f_2$)(2) = f_4 (f_2(2)) = f_4(3) = 1

g(3) = [2,3,1]∘[1,3,2](3) = ($f_4 \circ f_2$)(3) = f_4 (f_2(3)) = f_4(2) = 3

Ini berarti, g: S→ S atau g = f_3= [2,1,3]

1 ↦ 2
2 ↦ 1
3 ↦ 3

Begitu seterusnya, maka diperoleh tabel berikut.

∘	[1,2,3]	[1,3,2]	[2,1,3]	[2,3,1]	[3,1,2]	[3,2,1]

[1,2,3]	[1,2,3]	[1,3,2]	[2,1,3]	[2,3,1]	[3,1,2]	[3,2,1]
[1,3,2]	[1,3,2]	[1,2,3]	[3,1,2]	[3,2,1]	[2,1,3]	[2,3,3]
[2,1,3]	[2,1,3]	[2,3,1]	[1,2,3]	[1,3,2]	[3,2,1]	[3,1,2]
[2,3,1]	[2,3,1]	[2,1,3]	[3,2,1]	[3,1,2]	[1,2,3]	[1,3,2]
[3,1,2]	[3,1,2]	[3,2,1]	[1,3,2]	[1,2,3]	[2,3,1]	[2,1,3]
[3,2,1]	[3,2,1]	[3,1,2]	[2,3,1]	[2,1,3]	[1,3,2]	[1,2,3]

1. Dari tabel komposisi f_5 pada s_3 terlihat bahwa setiap $x, y \in s_3$ berlaku $x \circ y \in s_3$
2. Dengan menggunakan table komposisi f_5 pada s_3 dapat ditunjukkan bahwa setiap $x, y, z \in s_3$ berlaku $x \circ (y \circ z) \in s_3 = (x \circ y) \circ z \in s_3$

   Contoh :

   $x = [2,1,3]$, y = [3,1,2], $z = [1,3,2]$ Diperoleh :
   $x \circ (y \circ z) = [2,1,3] \circ ([3,1,2] \circ [1,3,2]) = [2,1,3] \circ [3,2,1] = [3,1,2]$
   $(x \circ y) \circ z = ([2,1,3] \circ [3,1,2]) \circ [1,3,2] = [3,2,1] \circ [1,3,2] = [3,1,2]$
3. Dari tabel komposisi f_5 pada s_3 terlihat bahwa ada $e = [1,2,3] \in s_3$ berlaku $x \circ e = x \; dan \; e \circ x = x$
4. Dari tabel komposisi f_5 pada s_3 diperole :

   $[1,2,3]^{-1} = [1,2,3]$ $[2,1,3]^{-1} = [2,1,3]$ $[3,1,2]^{-1} = [2,3,1]$

   $[1,3,2]^{-1} = [1,3,2]$ $[2,3,1]^{-1} = [3,1,2]$ $[3,2,1]^{-1} = [3,2,1]$

   Karena 1,2,3,4 maka $(s_3, \circ)$ suatu grup

Defenisi 2

Misalkan $(G,*)$ suatu grup. G disebut grup komutatif atau abelian jika setiap $x, y \in G$ berlaku $x * y = y * x$.

Contoh :

- $(\mathbb{Z}_6, +_6)$ suatu grup komutatif
- $(s_3, 0)$ bukan grup komutatif, karena ada $x = [3,1,2], y = [3,2,1] \in s_3$ dimana $x \circ y = [2,1,3] \neq y \circ x = [1,3,2]$

Defenisi 3

Misalkan $(G,*)$ suatu grup. $a \in G$ dan $n \in \mathbb{Z}$. a^n didefenisikan sebagai berikut :

$a^n = a * a * a * \ldots..* a$, jika $n > 0$ (Sebanyak n)

$a^n = a^{-1} * a^{-1} * \ldots..* a^{-1}$ jika $n < 0$ (Sebanyak n)

$an = e$ jika $n = 0$

Contoh :

- $(\mathbb{Z}, +)$ suatu grup. $2 \in \mathbb{Z}$

  $2^3 = 2 + 2 + 2 = 6$

  $2^0 = 0$

  $2^{-3} = (-2) + (-2) + (-2) = -6$n
- $(\mathbb{Z}_6, +_6)$ suatu grup

  $\bar{2}^3 = \bar{2} +_6 \bar{2} +_6 \bar{2} = \bar{0}$

  $\bar{2}-4 = \bar{2}1 - +6\bar{2}-1+6\bar{2}-1+6\bar{2}-1 = \bar{4}+6\bar{4}+6\bar{4}+6\bar{4} = \bar{4}$

  $\bar{2}^0 = 0$

Teorema 1

Misalkan $(G,*)$ suatu grup. $a \in G$ dan $m, n \in \mathbb{Z}$, maka :

1. $an * am = an+m$

9

2. $(a^n)^m = a^{nm}$

Pembuktian

Misalkan $(G,*)$ suatu grup. $a \in G$ dan $m, n \in \mathbb{Z}$, akan ditunjukkan :

i. $an * am = an+m$

ii. $(a^n)^m = a^{nm}$

1. Akan ditunjukkan $a^n * a^m = a^{n+m}$

a. Kasus 1 : $n = m = 0$

Jelas berlaku $a^n * a^m = a^{n+m}\backslash$

b. Kasus 2 : $n > 0\ dan\ m > 0$ Perhatikan bahwa :

$a^n * a^m = (a * a * a * \dots . * a)_{n\,buah} * (a * a * a * \dots . * a)_{m\,buah}$

$= (a * a * a * \dots . * a)_{n+m\,buah}$

$= an+m$

c. *Kasus 3 :* $n < 0\ dan\ m < 0$ Perhatikan bahwa :

$an * am = [a{-}1 * a{-}1 * \dots . * a{-}1]{-}nbuah[a{-}1 * a{-}1 *. . * a{-}1]mbuah$

$= [a^{-1} * a^{-1} * \dots . * a^{-1]}{}_{-}(n+m)buah\ {}_{a}{-}1$

$= an+m$

d. Kasus 4 : Salah satu positif dan salah satu negative , tanpa mengurangi keberlakuan secara umum

Misalkan $n > 0\ dan\ m < 0$

- *Kasus 4.1 :* $n + m > 0$ Perhatikan bahwa :

$a^n * a^m = (a * a *. . . * a)_n\ buah * (a^{-1} * a^{-1} *. . * a^{-1})_{-}m\ buah$

$= (a * a *. . . * a)_{n+m\,buah}$

$= an+m$

- *Kasus 4.2 :* $n + m < 0$ Perhatikan bahwa :

$a^n * a^m = (a * a *. . . * a)_n\ buah * (a^{-1} * a^{-1} *. . * a^{-1})_{-}m\ buah$

$= (a^{-1} * a^{-1} *. . * a^{-1})_{-}(n+m)\ buah$

$= an+m$

- *Kasus 4.3 :* $n + m = 0\ atau\ n = -m$ Perhatikan bahwa :

$a^n * a^m = (a * a *. . . * a)_n\ buah * (a^{-1} * a^{-1} *. . * a^{-1})_{-}mbuah$

$= a^0 = e_{(}\ karena\ n{=}{-}m)$

$= an+m$

2. Akan ditunjukkan $(a^n)^m = a^{nm}$

a. *Kasus 1 : Kasus 1 :* $n = m = 0$ Jelas berlaku $(a^n)^m = a^{nm}$

b. *Kasus 2 :* $n > 0\ dan\ m > 0$ Perhatikan bahwa :

$(an)m = (an)(an) \dots . (an)\ m\ buah$

$= [(aa. . . a)(aa \dots a) \dots . (aa. . a)_{m\,buah}]\ (aa \dots a)_{n\,buah}$

$= (a)(a) \dots (a)_{nm\,buah}$

$= anm$

c. *Kasus 3 :* $n < 0$ dan $m < 0$ Perhatikan bahwa :

$(an)m = (am)-1(am)-1 \ldots .(am)-1$ $_{n\,buah}$

$=(a-1a-1..a-1)-1(a-1a-1..a-1)-1..(a-1a-1 \ldots a-1)-1-m\ buah$

$(a^{-1}a^{-1}..a^{-1})_{-}n\ buah$

$= [(aa \ldots a)(aa \ldots a) \ldots .(aa..a)_{m\,buah}]\ (aa \ldots a)_{n\,buah}$

$= (a)(a) \ldots (a)_{nm\,buah}$

$= anm$

d. Kasus 4 : Salah satu positif dan salah satu negative , tanpa mengurangi keberlakuan secara umum

Misalkan $n > 0$ dan $m < 0$ Perhatikan bahwa :

$(an)m = (am)-1(am)-1 \ldots .(am)-1$ $_{n\,buah}$

$= (a-1a-1..a-1)-1(a-1a-1..a-1)-1..(a-1a-1 \ldots a-1)-1_{-m\,buah}$

$(a-1a-1..a-1)n\ buah$

$= [(a-1a-1..a-1)(a-1a-1..a-1) \ldots .(a-1a-1..a-1)-m\ buah]$

$(a-1a-1..a-1)n\ buah$

$= (a^{-1}a^{-1}..a^{-1})_{-}nm\ buah$

$= a^{nm}$

DEFINISI 4

Misalkan $(G,*)$ suatu grup

1. Banyaknya unsur/anggota pada *G* disebut orde dari *G* yang ditulis sebagai $o(G)$ atau $|G|$
2. *G* disebut grup tak hingga jika $o(G) = \infty$
3. *G* disebut grup hingga jika $o(G) \neq \infty$

Contoh 1.

$(Z,+)$ suatu grup tak hingga, karena $o(Z) = \infty$

$(Z_6,+_6)$ suatu grup hingga, karena $o(Z_6) = 6$

Lemma 2.3.1

Jika $(G,*)$ suatu grup maka :

1. Unsur identitas di G terhadap operasi biner $*$ tunggal
2. Setiap unsur di G inversnya terhadap operasi biner $*$ tunggal
3. Setiap $a \in G$ berlaku $(a^{-1})^{-1} = a$
4. Setiap $a, b \in G$ berlaku $(a * b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1}$

Bukti

misalkan $(G,*)$ suatu grup. Akan ditunjukkan :

1. Unsur identitas di G terhada p $*$ tunggal
2. Setiap unsur di G inversnya terhadap $*$ tunggal
3. Setiap $a \in G$ berlaku $(a^{-1})^{-1} = a$
4. Setiap $a, b \in G$ berlaku $(a * b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1}$

1. Misalkan unsur identitas di G terhadap $*$ adalah e dan f. Akan ditunjukkan $e = f$.

   Pandang e sebagai unsur identitas di G dan $f \in G$ maka

   $f * e = f \ldots (1)$ ....(menggunakan sifat komutatif)

   $e * f = f \ldots (2)$

   Pandang f sebagai unsur identitas di G dan $e \in G$ maka

   $f * e = e \ldots (3)$ ....(menggunakan sifat komutatif)

   $e * f = e \ldots (4)$

   Kita ambil Dari (1) dan (3)

   $f * e = f \ldots (1)$

   $f * e = e \ldots (3)$

   diperoleh $e = f * e = f$

2. Ambil $a \in G$ akan ditunjukkan invers dari a tunggal.

   Misalkan x dan y adalah invers dari a, akan ditunjukkan $x = y$

   Karena x invers dari a maka $a * x = e \ldots (1)$ dan

   $x * a = e \ldots (2)$

   Karena y invers dari a maka $a * y = e \ldots (3)$ dan

   $y * a = e \ldots (4)$

   Dengan menggunakan sifat distributif, perhatikan bahwa

   $$x = x * e = x * (a * y) = (x * a) * y = e * y = y$$

3. Ambil $a \in G$ akan ditunjukkan $(a^{-1})^{-1} = a$ Karena

   $a \in G$ dan $(G,*)$ suatu grup maka $a^{-1} \in G$

   Perhatikan bahwa

   $a * a^{-1} = e$ $\ldots (1)$ dan

$a^{-1} * a = e$ … (2)
$a^{-1} * (a^{-1})^{-1} = e$ … (3)
$(a^{-1})^{-1} * a^{-1} = e$ … (4)
Kita ambil dari (1) dan (4)
diperoleh bahwa

$$a * a^{-1} = (a^{-1})^{-1} * a^{-1}$$

Karena $a * a^{-1} = (a^{-1})^{-1} * a^{-1}$
Maka dengan menggunakan sifat asosiatif, kita dapat
$(a * a^{-1}) * a = ((a^{-1})^{-1} * a^{-1}) * a$
$a * (a^{-1} * a) = (a^{-1})^{-1} * (a^{-1} * a)$
$a * e = (a^{-1})^{-1} * e$
$a = (a^{-1})^{-1}$

4. Ambil $a, b \in G$. Akan ditunjjukkan $(a * b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1}$ atau $b^{-1} * a^{-1}$ adalah invers dari $a * b$ yaitu dengan menunjukkan
$(a * b) * (b^{-1} * a^{-1}) = e$
$(b^{-1} * a^{-1}) * (a * b) = e$
Perhatikan bahwa
$(a * b) * (b^{-1} * a^{-1}) = a * (b^{-1} * ab^{-1}) * a^{-1}$
karena $b^{-1} * ab^{-1}$ sebuah identitas, maka $b^{-1} * ab^{-1} =$ e
$= a * e * a^{-1}$
$= (a * e) * a^{-1}$
$= a * a^{-1}$
$= e$
$(b^{-1} * a^{-1}) * (a * b) = b^{-1} * (a^{-1} * a) * b$
karena $a^{-1} * a$ sebuah identitas, maka $a^{-1} * a =$ e
$= b^{-1} * e * a$
$= (b^{-1} * e) * b$
$= b^{-1} * b$
$= e$

Lemma 2.3.2
Jika $(G,*)$ suatu grup dan $a, b \in G$ maka :
1. Persamaan $a * x = b$ mempunyai solusi dan solusinya tunggal
2. Persamaan $y * a = b$ mempunyai solusi dan solusinya tunggal
3. Di G berlaku hukum pembatalan kiri yaitu
Setiap $u, w \in G$ dengan $a * u = a * w$ berlaku $u = w$
4. Di G berlaku hukum pembatalan kanan yaitu
Setiap $u, w \in G$ dengan $u * a = w * a$ berlaku $u = w$

Bukti

Misalkan $(G,*)$ suatu grup dan $a, b \in G$. Akan ditunjukkan :
1. Persamaan $a * x = b$ mempunyai solusi dan solusinya tunggal
2. Persamaan $y * a = b$ mempunyai solusi dan solusinya tunggal

3. Di G berlaku hukum pembatalan kiri yaitu
Setiap $u, w \in G$ dengan $a * u = a * w$ berlaku $u = w$
4. Di G berlaku hukum pembatalan kanan yaitu
Setiap $u, w \in G$ dengan $u * a = w * a$ berlaku $u = w$

1. Perhatikan bahwa
   $a * x = b$
   dengan menambahkan a^{-1} di ruas kanan dan kiri, maka
   $a^{-1} * (a * x) = a^{-1} * b$
   $(a^{-1} * a) * x = a^{-1} * b$................................(menggunakan sifat asosiatif)
   $e * x = a^{-1} * b$
   $x = a^{-1} * b$
   $\therefore x = a^{-1} * b$ adalah solusi dari persamaan $a * x = b$
   Misalkan s dan t adalah solusi dari persamaan $a * x = b$
   Akan ditunjukkan $s = t$
   Karena s dan t solusi dari persamaan $a * x = b$ maka
   $a * s = b$ … (1) dan
   $a * t = b$ … (2)
   Kita ambil dari (1) dan (2) diperoleh $a * s = a * t$
   Karena $a * s = a * t$
   Dengan menambahkan a^{-1} di ruas kanan dan kiri, maka
   $a^{-1} * (a * s) = a^{-1} * (a * t)$
   $(a^{-1} * a) * s = (a^{-1} * a) * t$......................(menggunakan sifat asosiatif)
   $e * s = e * t$
   $s = t$

2. Perhatikan bahwa
   $y * a = b$
   Kita tambahkan a^{-1} di ruas kanan dan kiri, maka
   $(y * a) * a^{-1} = b * a^{-1}$
   $y * (a * a^{-1}) = b * a^{-1}$...............................(menggunakan sifat asosiatif)
   $y * e = b * a^{-1}$
   $y = b * a^{-1}$
   $\therefore y = b * a^{-1}$ Adalah solusi dari persamaan $y * a = b$
   Misalkan s dan t adalah solusi dari persamaan $y * a = b$
   Akan ditunjukkan $s = t$
   Karena s dan t solusi dari persamaan $y * a = b$ maka
   $s * a = b$ … (1) dan
   $t * a = b$ … (2)
   Kita ambil dari (1) dan (2) diperoleh $s * a = t * a$

Karena $s * a = a * a$
Kita tambahkan a^{-1} di ruas kanan dan kiri, maka
$(s * a) * a^{-1} = (t * a) * a^{-1}$
$s * (a * a^{-1}) = t * (a * a^{-1})$ ....(menggunakan sifat asosiatif)
$s * e = t * e$
$s = t$

3. Ambil $u, w \in G$ dengan $a * u = a * w$ berlaku $u = w$
   Perhatikan bahwa
   $a * u = a * w$
   Kita tambah a^{-1} di ruas kanan dan kiri, maka
   $a^{-1} * (a * u) = a^{-1} * (a * w)$
   $(a^{-1} * a) * u = (a^{-1} * a) * w$....................(menggunakan sifat asosiatif)
   $e * u = e * w$
   $u = w$

4. Ambil $u, w \in G$ dengan $u * a = w * a$ berlaku $u = w$
   Perhatikan bahwa
   $u * a = w * a$
   Kita tambah a^{-1} di ruas kanan dan kiri, maka
   $(u * a) * a^{-1} = (w * a) * a^{-1}$
   $u * (a * a^{-1}) = w * (a * a^{-1})$.................................(menggunakan sifat asosiatif)
   $u * e = w * e$
   $u = w$

DEFINISI 5

Misalkan $(G,*)$ suatu grup $H \subseteq G$ dan $H \neq \emptyset$
H disebut subgroup dari G jika $(H,*)$ suatu grup

Contoh 2.
$(R, +)$ Suatu grup
$(\mathbb{Z}, +)$ Suatu grup
$(C, +)$ Suatu grup
$(R, +)$ Subgrup dari $(C, +)$
$(\mathbb{Z}, +)$ Subgrup dari $(R, +)$

Contoh 3.
$(\mathbb{Z}, +)$ Suatu grup
$2Z = \{\dots, -8, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, 8, \dots\}$
Apakah $2\mathbb{Z}$ subgrup dari $\mathbb{Z}$
Jawab : ya

Lemma 2.4.1

Misalkan $(G,*)$ suatu grup dan $H \subseteq G$ dan $H \neq \emptyset$
H subgrup dari $G \leftrightarrow$

1. Setiap $a, b \ \in H$ berlaku $a * b \ \in H$
2. Setiap $a \in H$ berlaku $a^{-1} \in H$

Bukti

Misalkan $(G,*)$ suatu grup dan $H \subset G$ dan $H \neq \emptyset$.
Akan ditunjukkan H subgrup dari $G \leftrightarrow$

1. Setiap $a, b \in H$ berlaku $a * b \ \in H$
2. Setiap $a \in H$ berlaku $a^{-1} \in H$

Misalkan H subgrup dari G. akan ditunjukkan
i.Setiap $a, b \in H$ berlaku $a * b \ \in H$
ii.Setiap $a \in H$ berlaku $a^{-1} \in H$
Karena H subgrup dari G maka (?,?) suatu grup sehinggaa berlaku (i) dan (ii)

($\Rightarrow$)
Misalkan H subgrup dari G. akan ditunjukkan
i. Setiap $a, b \in H$ berlaku $a * b \ \in H$
ii. Setiap $a \in H$ berlaku $a^{-1} \in H$
Akan ditunjukkan H subgrup dari G dalam hal ini tinggal menunjukkanH bersifat asosiatif terhadap $*$ dan $e \in H$

1. Ambil $a, b, c \in H$ akan ditunjukkan $a * (b * c) = (a * b) * c$Karena $a, b, c \in H$ dan $H \subset G$ maka $a, b, c \in G$
Karena $a, b, c \in G$ dan $(G,*)$ suatu grup maka $a * (b * c) \ \ a^{-1} \in H$

($\Leftarrow$)
Misalkan H subgrup dari G. akan ditunjukkan
i. Setiap $a, b \in H$ berlaku $a * b \ \in H$
ii. Setiap $a \in H$ berlaku $a^{-1} \in H$
Akan ditunjukkan H subgrup dari G dalam hal ini tinggal menunjukkan
H bersifat asosiatif terhadap $*$ dan $e \in H$

1. Ambil $a, b, c \in H$ akan ditunjukkan $a * (b * c) = (a * b) * c$
   Karena $a, b, c \in H$ dan $H \subset G$ maka $a, b, c \in G$
   Karena $a, b, c \in G$ dan $(G,*)$ suatu grup maka $a * (b * c) = (a * b) * c$

2. Ambil $a \in H$
   Karena $a \in H$ maka menurut prems (ii), $a^{-1} \in H$

Karena $a \in H$ dan $a^{-1} \in H$ maka menurut prems 1,
$a * a^{-1} \in H$ atau $e \in H$

Contoh 4.

$G = \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} | a, b, c, d \in R, ad - bc \neq 0\}$. $(G,*)$ suatu grup.

Tulis $K = \{\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} | b \in R\}$. Akan ditunjukkan K subgrup dari G.

Jawab :

1. Akan ditunjukkan $K \subseteq G$
   Ambil $x \in K$ akan ditunjukkan $x \in G$
   Karena $x \in K$ dan $K = \{\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} | b \in R\}$ maka
   $x = \begin{pmatrix} 1 & b_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ untuk suatu $b_1 \in R$
   Karena $1, 0, b_1 \in R$ dan $1.1 - b_1.0 \neq 0$ maka $x = \begin{pmatrix} 1 & b_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$
   $\therefore K \subseteq G$

2. Karena $K = \{\begin{pmatrix} 1 & b_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} | b \in R\}$ maka untuk $b = 0$ diperoleh

   $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in K$
   $\therefore K \neq 0$

3. Ambil $x, y \in K$ akan ditunjukkan $x.y \in K$
   Karena $x, y \in K$ dan $K = \{\begin{pmatrix} 1 & b_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} | b \in R\}$ maka
   $x = \begin{pmatrix} 1 & b_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
   $y = \begin{pmatrix} 1 & b_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ untuk suatu $b_1, b_2 \in R$
   Perhatikan bahwa
   $x.y = \{\begin{pmatrix} 1 & b_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & b_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & b_1 + b_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ....(kita kalikan)

   Karena $b_1, b_2 \in R$ maka $b_1 + b_2 \in R$

   $x.y = \begin{pmatrix} 1 & b_1 + b_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

4. Ambil $x \in K$ akan ditunjukkan $x^{-1} \in K$
   Karena $x \in K$ dan $K = \{\begin{pmatrix} 1 & b \\ \end{pmatrix} | b \in R\}$ maka

0 1

$x^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -b_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in K$

untuk suatu $b_1 \in R$

Pilih $x^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -b_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in K$

Karena $b_1 \in R$ maka $-b_1 \in R$

Akibatnya $x^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -b_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in K$

karena 1,2,3,4 maka K subgrup dari G

Contoh 5.

$(\mathbb{Z}_{12}, +_{12})$ suatu grup

Tulis $H = \{\bar{0}, \bar{4}, \bar{8}\}$

Periksa apakah H subgrup dari $\mathbb{Z}_{12}$

Jawab :

1. karena $H = \{\bar{0}, \bar{4}, \bar{8}\}$dan $\mathbb{Z}_{12} =\{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{9}, \overline{10}, \overline{11}\}$

   $H \subseteq \mathbb{Z}_{12}$

2. Jelas $H = \{\bar{0}, \bar{4}, \bar{8}\} \neq \emptyset$

3.

$+_{12}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{8}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{8}$
$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{8}$
$\bar{8}$	$\bar{8}$	$\bar{8}$	$\bar{4}$

Dari tabel dapat kita lihat setiap penjumlahan hasil 12 = 0 dan 13, diulang jadi = 1 dan seterusnya

Setiap $x, y \in H$ berlaku $x +_{12} y \in H$

4. Dari tabel diperoleh

$\bar{0}^{-1} = \bar{0} \in H$

$\bar{4}^{-1} = \bar{8} \in H$

$\bar{8}^{-1} = \bar{4} \in H$

Karena 1,2,3,4 maka $H = \{\bar{0}, \bar{4}, \bar{8}\}$ subgrup dari $\mathbb{Z}_{12}$

Contoh 6.

Tentukan semua subgrup dari $\mathbb{Z}_{12}$

Jawab :

$H = \{\bar{0}\}$ Perkalian 0

$H = \{\bar{0}, \bar{6}\}$ Perkalian 6

$H = \{\bar{0}, \bar{4}, \bar{8}\}$ Perkalian 4
$H = \{\bar{0}, \bar{3}, \bar{6}, \bar{9}\}$ Perkalian 3
$H = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}, \overline{10}\}$ Perkalian 2
$H = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{9}, \overline{10}, \overline{11},\}$

Contoh 7.

Tentukan semua subgrup dari S_3

Jawab :

$H = \{[1,2,3]\}$
$H = \{[1,2,3], [1,3,2]\}$
$H = \{[1,2,3], [3,2,1]\}$
$H = \{[1,2,3], [2,1,3]\}$
$H = \{[1,2,3], [2,3,1], [3,1,2]\}$
$H = S_3$

Lemma 2.4.2

Misalkan $(G,*)$ suatu grup hingga, $H \subseteq G$ dan $H \neq \emptyset$
H subgrup dari G jika setiap $x, y \in H$ berlaku $x * y \in H$

(jika setiap $x, y \in H$ berlaku $x * y \in H$ maka H subgrup dari G)

Bukti

Misalkan $(G,*)$ suatu grup hingga, $H \subseteq G$ dan $H \neq \emptyset$
Dan setiap $x, y \in H$ berlaku $x * y \in H$. Akan ditunjukkan setiap $a \in H$ berlaku $a^{-1} \in H$
Ambil $a \in H$

Perhatikan bahwa
$a^2 \in H \subseteq G$
$a^3 \in H \subseteq G$

$\vdots$
$a^n \in H \subseteq G$
Karena G grup hingga maka akan ada $r, s \in N$ dan $r > s > 0$ sehingga $a^r = a^s$
Karena $r > s > 0$ dan $a^r = a^s$ maka $a^{r-s} = e$
Karena $r - s \geq 1$ maka $a^{r-s} \in H$
Karena $a^{r-s} = e$ dan $a^{r-s} \in H$ maka Karena $e \in H$
Karena $e \in H$ dan $e = a^0$ maka $a^0 \in H$
Karena $r - s - 1 \geq 0$ maka $a^{r-s-1} \in H$

Perhatikan bahwa

$a^{-1} = a^{-1} . a = a^{-1} . a^{r-s} = a^{r-s-1} \in$

$\therefore a^{-1} \in H$

Contoh 8.

$(\mathbb{Z}_{12}, +_{12})$ suatu grup

$H = \{\overline{0}, \overline{4}, \overline{8}\}$

Akan ditunjukkan H subgrup dari $\mathbb{Z}_{12}$

Jawab :

1. Jelas $H \subseteq \mathbb{Z}_{12}$
2. Jelas $H = \{\overline{0}, \overline{4}, \overline{8}\} \neq \emptyset$

3.

$+_{12}$	$\overline{0}$	$\overline{4}$	$\overline{8}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{4}$	$\overline{8}$
$\overline{4}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{8}$
$\overline{8}$	$\overline{8}$	$\overline{8}$	$\overline{4}$

Dari tabel dapat kita lihat setiap penjumlahan hasil 12 = 0 dan 13 diulang jadi = 1 dan seterusnya

Setiap $x, y \in H$ berlaku $x +_{12} y \in H$

Karena G grup hingga maka menurut Lemma 2.4.2 H subgrup dari $\mathbb{Z}_{12}$

Contoh 9.

$(\mathbb{Z}, +)$ suatu grup.

$H = \{K\mathbb{Z} \parallel K \in \mathbb{N}, K \neq 1\}$

Periksa apakah H subgrup dari $(\mathbb{Z}, +)$

Jawab :

1. Ambil $x \in H$ akan ditunjukkan $x \in \mathbb{Z}$

   Karena $x \in H$ dan $H = \{K\mathbb{Z} \parallel K \in \mathbb{N}, K \neq 1\}$

   Maka $x = Kz_1$ untuk suatu $z_1 \in \mathbb{Z}$

   Perhatikan bahwa

   $x = K.z_1 \in \mathbb{Z}$ $\qquad$ $k \in \mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$

   $z_1 \in \mathbb{Z}$

   $H \subseteq \mathbb{Z}$
2. Karena $1 \in \mathbb{Z}$ dan $K = K.1 \in H$ maka $H \neq \emptyset$
3. Ambil $a, b \in H$

   Karena $a, b \in H$ dan $H = \{K\mathbb{Z} \parallel K \in \mathbb{N}, K \neq 1\}$

   Maka $a = K.z_1$, $b = K.z_2$ untuk suatu $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}$

   Perhatikan bahwa

$a + b \ = \ Kz_1 + \ Kz_2$
$= K(z_1 + z_2)$ ....(kita jumlahkan)
$= Kz_3$ untuk suatu $z_3 \in \ \mathbb{Z}$
$\therefore a + b \in H$

4. Ambil $a \in H$
   Karena $a \in H$ dan $H = \{K\mathbb{Z} \parallel K \in \mathbb{N}, K \neq 1\}$
   Maka $a = K.z_1$, untuk suatu $z_1 \in \mathbb{Z}$
   Pilih $a^- = -(Kz_1) = K(-z_1)$..........................(kita pindahkan negatif(-)
   Perhatikan bahwa
   $a^- = K(-z_1) \in \mathbb{Z}$
   $\therefore a^- \in H$

Karena 1,2,3 dan 4 maka H subgrup dari $(\mathbb{Z}, +)$

Contoh 10.

$(\mathbb{Z}_{12}, +_{12})$ suatu grup
$\mathbb{Z}_{12} = \ \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{9}, \overline{10}, \overline{11},\}$
$H = \{0,1,3\}$ bukan subgrup dari $\mathbb{Z}_{12}$

Jawab :

$H = \{0,6\}$ supgrup dari $\mathbb{Z}_{12}$

$+_{12}$	0	6
0	0	6
6	6	0

1. $H \subseteq \mathbb{Z}_{12}$
2. $H \neq \emptyset$
3. Dari tabel dapat disimpulkan setiap $a, b \in H$ berlaku $a + b \in H$
4. $0^{-1} = 0, 6^{-1} = 6$

Karena 1,2,3 dan 4 maka H subgrup dari $\mathbb{Z}_{12}$

Definisi 6
Misalkan (**G**, *) suatu group. **G** disebut **group siklik** jika ada **a** $\in$G sehingga G = {$\mathbf{a^n}$ | **n** $\in \mathbb{Z}$}. Dalam hal ini **a** disebut **generator** atau **pembangun** dari **G** dan ditulis sebagai **G = (a)**.

Contoh 1

($\mathbb{Z}$, +) suatu group
$1^0 = 0$, $1^1 = 1$, $1^2 = 2$, $1^3 = 3$, $1^4 = 4$, ...
Berdasarkan definisi 6 bahwa G = {$\mathbf{a^n}$ | **n** $\in \mathbb{Z}$} itu merupakan penjumlahan berulang sebanyak pangkatnya.

$(-1)^0 = -1$, $1^{-2} = -2$, $1^{-3} = -3$, $1^{-4} = -4$, ...
Jadi, $\mathbb{Z} = \{1^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ atau $\mathbb{Z} = (1)$

$(-1)^0 = 0$, $(-1)^1 = -1$, $(-1)^2 = -2$, $(-1)^3 = -3$, $(-1)^4 = -4$, ...
$(-1)^{-1} = 1$, $(-1)^{-2} = 2$, $(-1)^{-3} = 3$, $(-1)^{-4} = 4$, ...

Jadi, $\mathbb{Z} = \{ (-1)^n \mid n \in \mathbb{Z} \}$ atau $\mathbb{Z} = (-1)$
Ini berarti, $\mathbb{Z}$ suatu group siklik dengan pembangun 1 dan -1

Contoh 2

($\mathbb{Z}_6$, $+_6$) suatu group.
Perhatikan bahwa
$(\bar{1})^0 = \bar{0}, (\bar{1})^1 = \bar{1}, (\bar{1})^2 = \bar{2}, (\bar{1})^3 = \bar{3}, (\bar{1})^4 = \bar{4}, (\bar{1})^5 = \bar{5}, (\bar{1})^6 = \bar{6},$
Jadi, $\mathbb{Z}_6 = \{ (\bar{1})^n \mid n \in \mathbb{Z} \}$
Perhatikan bahwa
$\mathbb{Z}_6 = \langle 5 \rangle$

$$(\bar{5})^0 = \bar{0}, (\bar{5})^1 = \bar{5}, (\bar{5})^2 = \bar{4}, (\bar{5})^3 = \bar{3}, (\bar{5})^4 = \bar{2}, (\bar{\bar{5}})^5 = \bar{1}, (\bar{5})^6 = \bar{0},$$

Karena $(\bar{5})^0 = \bar{0}$ maka 5 tersebut tidak dapat di jumlahkan dengan angkanya sendiri,
$(\bar{5})^1 = \bar{5}$, karena penjumlahannya hanya berulang 1 kali
$(\bar{5})^2 = \bar{4}$, sebab $(\bar{5})^2 = 5 + 5 = 10$,karena 10 modulo 6 bersisa 4 maka $(\bar{5})^2 = \bar{4}$ dan begitupun seterusnya.

Jadi, ($\mathbb{Z}_6$, $+_6$) group siklik dengan pembangun $\bar{1}$ dan $\bar{5}$

Definisi 7
Misalkan **A** suatu hinpunan yang tak kosong dan ~ sautu relasi yang didefinisikan di **A**. Relasi ~ di **A** disebut relasi ekuivalen jika :

1. ∀ **a** ϵ **A** belaku **a ~ a**
2. ∀ **a**, **b** ϵ **A** dengan **a ~ b** maka **b ~ a**
3. ∀ **a**. **b**. **c** ϵ **A** dengan **a ~ b** dan **b ~ c** maka **a ~ c**

Keterangan
∀ = Setiap
~ = Kemungkinan
≡ = Ekuivalen

Contoh 3
A = { x | x peserta kelas struktur aljabar kelas A Jurusan Matematika UP TA 2021 }Setiap a,b ϵ A didefinisikan relasi ~ sebagai berikut. Jika dituliskan ∀ a,b ϵ A

a ~ b jika a sekampung dengan b. Periksa apakah relasi sekampung merupakan relasi ekuivalen ?

jawab :

1. Ambil a,b ϵ A, karena a sekampung dengan b dan a,b ϵ A sendiri maka
   Terbukti : **a ~ a** (terdapat pada definisi 7 nomor 1)
2. Ambil a , b ϵ A dengan a ~ b akan ditunjukkan bahwa b ~ a. (menggunakan sifat komutatif)
   Karena a ~ b maka asekampung dengan b, akibatnya b juga sekampung dengan a.

   Ini terbukti: **b ~ a** (terdapat pada definisi 7 nomor 2)

3. Ambil a, b, c ϵ A dengan a ~ b dan b ~ c akan ditunjukkan a ~ c.
   Karena a ~ b maka a sekampung dengan b . . . (i)
   Karena b ~ c maka b sekampung dengan c . . . (ii)
   Dari (i) dan (ii) dapat disimpulkan a sekampung dengan c . . . (iii)
   ini terbukti **a ~ c** (terdapat pada definisi 7 nomor 2)

Karena 1, 2, 3 maka relasi sekampung adalah relasi ekuivalen.

Contoh 4
Misal B adalah himpunan bilangan bulat, setiap a, b ϵ B definisikan relasi ≡ sebagai berikut. a ≡ b jika a - b habis dibagi 5. Tunjukkan bahwa relasi ≡ merupakan relasi ekuivalen!

Jawab :

1. Ambil a ϵ B akan ditunjukkan a ≡ a

Karena a-a = 0 dan 0 habis dibagi 5

Maka terbukti **a ≡ a** (terdapat pada definisi 7 nomor 1)

2. Ambil a, b ϵ B dengan a ≡ b akan ditunjukkan b ≡ a (menggunakan sifat komutatif)

   Karena a ≡ b maka a-b habis dibagi 5,

   akibatnya, -(a-b) juga habis dibagi 5. (menggunakan sifat Asosiatif)

   Ini berarti, b-a habis dibagi 5

   Terbukti **b ≡ a** (terdapat pada definisi 7 nomor 2)

3. Ambil a, b, c ϵ B dengan a ≡ b dan b ≡ c, akan ditunjukkan a ≡ c

   Karena a ≡ b maka a-b habis dibagi 5 ..... (1)

   Karena b ≡ c maka b-c habis dibagi 5 ....(2)

   Dari (1) dan (2) diperoleh (a-b)+(b-c) habis dibagi 5.

   Ini berarti, a-c habis dibagi 5

   Terbukti **a ≡ c** (terdapat pada definisi 7 nomor 3)

Karena 1,2,3 maka relasi ≡ merupakan relasi ekuivalen

Definisi 8
Misalkan (**G**, *) suatu group dan **H** subgroup dari **G**.
Setiap **a, bϵG** definisikan relasi ≡ **(modulo H)** di **G** sebagai berikut.
a disebut **kongruen modulo H** dengan **b** yang ditulis sebagai $\boldsymbol{a \equiv b \ (mod\ H)}$ jika **a** * $\mathbf{b}^{-1}$ ϵ **H**

Lemma 2.4.3

Relasi **kongruen modulo H** seperti pada **Definisi 8** adalah **relasi ekuivalen** di subgroup **G**

Bukti :

Misalkan (G, *) adalah suatu grup, H subgrup dari G.

Setiap a,b ϵ G definisikan relasi ≡ (modulo H) di subgroup dari G sebagai berikut :

a ≡ $b\ (mod\ H)$ jika a * b^{-1} ϵ H

Akan ditunjukkan relasi ≡ (mod H) suatu relasi ekuivalen.

1. Ambil a ϵ G

Karena $a*a^{-1}$ = e dan H suatu subgrup dari G maka $a*a^{-1}$ = e ϵ H (terdapat pada definisi 8)

Ini berarti, a ≡ a (mod H)

2. Ambil a,b ϵ G dengan a ≡ b (mod H) akan ditunjukkan b ≡ a (mod H) (sifat komutatif)
   yaitu dengan menunjukan $b*a^{-1}$ ϵ H

   Karena a ≡ b (mod H) maka $a*b^{-1}$ ϵ H

   Karena $a*b^{-1}$ ϵ H dan H subgrup dari G maka $(a*b^{-1})^{-1}$ ϵ **H** atau $(b^{-1})^{-1} * a^{-1} \in H$ atau $b*a^{-1} \in H$ (terdapat pada definisi 8)

3. Ambil $a,b,c \in G$ dengan $a \equiv b \pmod H$ dan $b \equiv c \pmod H$ adt $a \equiv c \pmod H$ yaitu dengan menunjukan $a*c^{-1} \in H$

   Karena $a \equiv b \pmod H$ maka $a*b^{-1} \in H$

   Karena $b \equiv c \pmod H$ maka $b*c^{-1} \in H$

   Karena $a*b^{-1} \in H$ dan $b*c^{-1} \in H$ dan H subgrup dari G maka

   $(a*b^{-1}) * (b*c^{-1}) \in H$ atau

   $a* (b^{-1} * b)*c^{-1} \in H$ (sifat Asosiatif)

   $a*e* c^{-1} \in H$ (terdapat pada definisi 7)

   $a* c^{-1} \in H$

Karena 1,2,3 maka relasi $\equiv \pmod H$ suatu relasi ekuivalen.

Definisi 9

Misalkan (**G**, *) suatu group, **H** subgoup dari **G** dan **a** $\in$ **G.**

1. Himpunan **H*a = { h*a | h ⍰ H }** disebut koset kanan dari **H** di subgroup **G** yang memuat **a**
2. Himpunan **a*H = { a*H | h ⍰ H }** disebut **koset kiri** dari **H** di subgroup **G** yang memuat **a**

Contoh 5

($\mathbb{Z}$, +) suatu group

$H = 6\mathbb{Z} = \{ \ldots, -18, -12, -6, 0, 6, 12, 18, \ldots \}$ (nilai+6)

H subgroup dari $\mathbb{Z}$

$H+0= \{\ldots, -18+0, -12+0, -6+0, 0+0, 6+0, 12+0, 18+0, \ldots \}$ (nilai H+sampai 6z)

$= \{ \ldots, -18, -12, -6, 0, 6, 12, 18, \ldots \}$

$H+1= \{\ldots, -18+1, -12+1, -6+1, 0+1, 6+1, 12+1, 18+1, \ldots \}$

$= \{ \ldots, -17, -11, -5, 1, 7, 13, 19, \ldots \}$

$H+2= \{\ldots, -16, -10, -4, 2, 8, 14, 20, \ldots \}$

$H+3= \{\ldots, -15, -9, -3, 3, 9, 15, 21, \ldots \}$

$H+4= \{\ldots, -14, -8, -2, 4, 10, 16, 22, \ldots \}$

$H+5= \{\ldots, -13, -7, -1, 5, 11, 17, 23, \ldots \}$

$H+6= H+0$

Perhatikan bahwa: $H+7= H+1$ (nilai dari H+6= H+0 sama)

$H-1 = \{\ldots, -19, -13, -7, -1, 5, 11, 17, \ldots \} = H+5$

H-2 = H+4, H-3 = H+3, H-4 = H+2, H-5 = H+1

Jadi semua koset-koset kanan yang berbeda dari H di G adalah H+0, H+1, H+2, H+3, H+4 dan H+5.

Contoh 6

(S_3, o) suatu group. H = { [1,2,3], [1,3,2]}. Tentukan semua koset-koset kanan dan koset-koset kiri dari H di S_3 yang berbeda.

Jawab :

Nilai (H,o)

Koset kanan Koset kiri

Ho[1,2,3] = {[1,2,3] o [1,2,3], [1,3,2] o [1,2,3]} = {[1,2,3],[1,3,2]}

Ho[1,3,2] = {[1,2,3]o[1,3,2], [1,3,2]o[1,3,2]} = {[1,3,2],[1,2,3]} = {[1,2,3],[1,3,2]}

Ho[2,1,3] = {[1,2,3]o[2,1,3],[1,3,2]o[2,1,3]} = {[2,1,3],[3,1,2]}

Ho[2,3,1] = {[1,2,3]o[3,2,1],[1,3,2]o[3,2,1]} = {[3,2,1],[2,3,1]}

Ho[3,1,2] = {[1,2,3]o[3,1,1],[1,3,2]o[3,1,2]} = {[3,1,2],[2,1,3]}

Ho[3,2,1] = {[1,2,3]o[3,2,1],[1,3,2]o[3,2,1]} = {[3,2,1],[2,3,1]}

Jadi koset-koset kanan dan koset-koset kiri dari H di S_3 yang berbeda adalah {[1,2,3],[1,3,2]}, {[2,1,3],[3,1,2]}, {[3,2,1],[2,3,1]}, {[3,1,2],[2,1,3]}

Definisi 10

Misalkan **G** suatu himpunan yang tak kosong, ~ suatu relasi ekuivalen pada **G** dan **a** ϵ **G**. Himpunan **[a] = { x ϵ G | a ~ x}** disebut **kelas ekuivalen** yang memuat **a** di **G**.

Contoh 7

(ℤ, +) suatu group

H = 5ℤ = {. . ., -10, -5, 0, 5, 10, . . .} subgrup dari ℤ setiap a,b ϵ ℤ definisikan relasi kongruen modulo H sebagai berikut :

Dituliskan dengan $a \equiv b \pmod{H}$ jika a + (-b) ϵH

Sudah dibuktikan pada Lemma 2.4.3 bahwa relasi kongruen modulo H suatu relasi ekuivalen. Tentukan [0], [1], [2], [3], [4], [5], [6], [7], . . . , [-1], [-2], [-3], [-4], [-5], [-6], . . .

Jawab :

[0] = { x ϵ ℤ | 0 ≡ x (mod H)}
= { x ϵ ℤ | 0-x ϵ H}
= { x ϵ ℤ | -x ϵ H}
= {. . ., -10, -5, 0, 5, 10, 15, . . .} = H (nilai +5)

[1] = { x ϵ ℤ | 1 ≡ x (mod H)}

$= \{ x \in \mathbb{Z} \mid 1\text{-}x \in H\}$

$= \{. . ., -9, -4, 0, 6, 11, 16, . . .\} = H+1$ (nilai +5)

[2] $= \{ x \in \mathbb{Z} \mid 2 \equiv x \pmod H\}$

$= \{ x \in \mathbb{Z} \mid 2\text{-}x \in H\}$

$= \{. . ., -8, -3, 2, 7, 12, 17, . . .\} = H+2$ (nilai +5)

.

.

[-3] $= \{ x \in \mathbb{Z} \mid -3 \equiv x \pmod H\}$

$= \{ x \in \mathbb{Z} \mid -3\text{-}x \in H\}$

$= \{. . ., -13, -8, -3, 2, 2, 7, 12, 17, . . .\} = H+ -3 = H+2$ (nilai +5)

Kelas-kelas ekuivalen yang berbeda dari H di $\mathbb{Z}$ adalah [0] = H+0 , [1] = H+1, [2] = H+2, [3] = H+3, [4] = H+4

Lemma 2.4.4

Misalkan (**G**, *) suatu group, **H** subgroup dari **G**, ≡ **(mod H)** relasi ekuivalen di **G** dan **a** ϵ **G** maka

H * a = { x ϵ G | a ≡ x (mod H)} atau **H * a = [a]**

Penjelasannya:

Pertama-tama, kita akan membuktikan bahwa H * a ⊆ { x ϵ G | a ≡ x (mod H)}.

Misalkan x ϵ H * a, maka x = h * a untuk suatu h ϵ H. Karena ≡ (mod H) adalah relasi ekuivalen, maka a ≡ x (mod H), sehingga a dan x memiliki kelas ekuivalen yang sama terhadap relasi ≡ (mod H). Oleh karena itu, x ϵ { x ϵ G | a ≡ x (mod H)}.

Selanjutnya, kita akan membuktikan bahwa { x ϵ G | a ≡ x (mod H)} ⊆ H * a.

Misalkan x ϵ G sedemikian sehingga a ≡ x (mod H). Artinya, x dan a memiliki kelas ekuivalen yang sama terhadap relasi ≡ (mod H), yaitu [a] = [x]. Dari definisi kelas ekuivalen, kita tahu bahwa a dan x dapat ditulis sebagai a = h1 * k dan x = h2 * k untuk suatu k ϵ H dan h1, h2 ϵ G.

Oleh karena [a] = [x], maka h1 * k ≡ h2 * k (mod H), yang berarti h1 * k * k^-1 * h2^-1 ϵ H. Karena H adalah subgroup dari G, maka h1 * k * k^-1 * h2^-1 = h1 * (k * k^-1) * h2^-1 = h1 * e * h2^-1 = h1 * h2^-1 ϵ H. Oleh karena itu, h1 * h2^-1 ϵ H dan kita dapat menuliskan x = (h1 * h2^-1) * a. Dengan demikian, x ϵ H * a.

Karena sudah dibuktikan bahwa H * a ⊆ { x ϵ G | a ≡ x (mod H)} dan { x ϵ G | a ≡ x (mod H)} ⊆ H * a, maka H * a = { x ϵ G | a ≡ x (mod H)}. Sehingga, lemma 2.4.4 terbukti.

Bukti :

Misalkan (G,*) suatu group. H subgroup dari G, ≡ mod (H) relasi ekuivalen di G dan a ϵ G akan ditunjukkan bahwa

H * a = { x ϵ G | a ≡ x mod (H)} atau H * a = [a],

yaitu dengan menunjukan

(i) H*a ⊆ [a] dan (ii) [a] ⊆ H*a

(i) Ambil y ϵ H*a akan ditunjukkan

$$y \in [a] = \{ x \in G \mid a \equiv x \bmod (H)\} = \{ x \in G \mid a * x^{-1} \in H\}$$

yaitu dengan menunjukan $a * y^{-1} \in H$.

Karena y ϵ H*a dan H*a = {h*a | h ϵ H} maka $y = h_1 * a$ untuk suatu $h_1 \in H$

Perhatikan Bahwa :

$$a*y^{-1} = a*(h_1*a)^{-1} = a*(a^{-1}* h_1^{-1}) = (a*a^{-1})* h_1^{-1} = e* h_1^{-1} = h_1^{-1}$$

Karena $h_1 \in H$ dan H subgroup dari G maka

$h^{-1} \in H$

Dengan demikian

$a*y^{-1} \in H$.

(ii) Ambil $y \in [a]$ akan ditunjukkan

$y \in H*a = \{ h*a \mid h \in H\}$,

yaitu dengan menunjukan

ada $h_1 \in H$ sehingga $y = h_1*a$

Karena $y \in [a]$ dan $[a] = \{x \in G \mid a \equiv x \pmod H\}= \{x \in G \mid a*x^{-1} \in H\}$ maka

$y \in G$ dan $a*y^{-1} \in H$

Karena $a*y^{-1} \in H$ dan $H = \{ h_1, h_2, . . .|$ maka

ada $h_t \in H$ sehingga $a*y^{-1} = h_t$ atau $y = h_t^{-1}*a$

Karena $h_t \in H$ dan H subgroup dari G maka

$h_t^{-1} \in H$

Tulis $h_t^{-1} = h_1$ maka ada $h_1 \in H$ sehingga

$y = h*a$

Definisi 11

Misalkan **A** dan **B** suatu himpunan yang tak kosong dan f suatu fungsi dari **A** ke **B**

1. Fungsi **f** disebut **satu-satu** jika setiap **x**1, **x**2 $\in$ **A** dengan **x**1$\neq$ **x**2 maka **f**(**x**1) = **f**(**x**2) (atau jika **f**(**x**1) = **f** (**x**2) maka **x**1 = **x**2)
2. Fungsi **f** disebut **pada** jika setiap **y** $\in$ B ada **x** $\in$ **A** sehingga **y** = **f**(**x**)

Lemma 2.4.5

Misalkan (**G**,*****) suatu group dan **H** subgroup dari **G**. Setiap **a, b** $\in$ **G** ada fungsi **f** yang satu-satu dan pada dari **H*a** ke **H*b**

Penjelasannya:

Pertama-tama, kita akan membuktikan bahwa f (H*a) ⊆ H*b.

Misalkan x $\in$ H*a, maka x = h * a untuk suatu h $\in$ H. Kita ingin menunjukkan bahwa f(x) $\in$ H*b, yaitu f(x) = h' * b untuk suatu h' $\in$ H. Karena f adalah fungsi pada, maka f(x) = f(h * a) = f(h) * f(a). Karena H adalah subgroup dari G, maka h dan a $\in$ G dan f(h) dan f(a) $\in$ G juga. Karena f adalah fungsi satusatu, maka f(h) dan f(a) berbeda-beda untuk setiap h dan a yang berbeda-beda. Oleh karena itu, kita dapat menuliskan f(a) = h' * b untuk suatu h' $\in$ H. Dengan demikian, f(x) = f(h) * f(a) = h'' * h' * b untuk suatu h'' $\in$ H. Oleh karena H adalah subgroup dari G, maka h'' * h' $\in$ H dan f(x) $\in$ H*b.

Selanjutnya, kita akan membuktikan bahwa H*b ⊆ f(H*a).

Misalkan y $\in$ H*b, maka y = h * b untuk suatu h $\in$ H. Karena ≡ (mod H) adalah relasi ekuivalen, maka a ≡ b (mod H), sehingga a dan b memiliki kelas ekuivalen yang sama terhadap relasi ≡ (mod H). Oleh karena itu, terdapat x ϵ H*a sehingga a = x (mod H). Kita ingin menunjukkan bahwa f(x) = h' * b untuk suatu h' ϵ H, sehingga y ϵ f(H*a). Karena f adalah fungsi pada, maka f(x) = f(a) = h' * b untuk suatu h' ϵ H. Dengan demikian, y = h * b = h * f(a) = f(h * a) dan y ϵ f(H*a).

Karena sudah dibuktikan bahwa f(H*a) ⊆ H*b dan H*b ⊆ f(H*a), maka f(H*a) = H*b. Sehingga, lemma 2.4.5 terbukti.

Bukti :

Misalkan (G,*) suatu group dan H subgroup dari G. Akan ditunjukkan setiap a,b ϵ G ada fungsi f yang satu-satu dan pada dari H*a ke H*b.

Ambil a,b ϵ G

Buat fungsi f : H*a → H*b

ha → hb

Akan ditunjukkan f satu-satu dan pada

1. Ambil x_1, x_2 ϵ H*a dengan f (x_1) = f (x_2) akan ditunjukkan $x_1 = x_2$

Karena x_1,x_2 ϵ H*a dan H*a = {h*a | h ϵ H} maka

$x_1 = h_1*a$, $x_2 = h_2*a$ untuk suatu h_1,h_2 ϵ H (Sifat Distributif dan Asosiatif)

karena f (x_1) = f (x_2) maka

$f(h_1*a)= f(h_2*a)$ atau $h_1*b = h_2*b$

karena $h_1*b = h_2*b$ maka

$h_1 = h_2$

perhatikan bahwa $h_1 = h_2$

$h_1*a = h_2*a$

$x_1 = x_2$

Ini berarti, f satu-satu

2. Ambil y ϵ H*b akan ditunjukkan ada x ϵ H*a sehingga y = f(x)

Misalkan y = h*b, maka y = h*b untuk suatu h ϵ H.

Karena y = h*b= {h*b | h ϵ H} maka

$y = h_1*b$ untuk suatu h_1 ϵ H

Pilih $x = h_1*a$ maka

$f(x) = f(h_1*a) = h_1*b = y$

Ini berarti, f pada

Contoh 1

$(\mathbb{Z}, +)$ suatu group

$H = 6\mathbb{Z}$ = { ...., -18, -12, -6, 0, 6, 12, 18,...} subgroup dari $\mathbb{Z}$

Tentukan semua koset-koset kanan dari H di $\mathbb{Z}$ yang berbeda

Jawab :

Penjelasannya:

Kita dapat menuliskan setiap koset kanan dari H sebagai H + a untuk suatu a ϵ $\mathbb{Z}$. Dalam hal ini, a dapat diambil dari himpunan {0, 1, 2, ..., 5} karena jika a > 5, maka H + a = H + (a - 6) dan jika a < 0, maka H + a = H + (a + 6). Sehingga, setiap koset kanan dari H di $\mathbb{Z}$ yang berbeda adalah:

H + 0 = { ..., -18, -12, -6, 0, 6, 12, 18, ... }

H + 1 = { ..., -17, -11, -5, 1, 7, 13, 19, ... }

H + 2 = { ..., -16, -10, -4, 2, 8, 14, 20, ... }

H + 3 = { ..., -15, -9, -3, 3, 9, 15, 21, ... }

H + 4 = { ..., -14, -8, -2, 4, 10, 16, 22, ... }

H + 5 = { ..., -13, -7, -1, 5, 11, 17, 23, ... }

Dengan demikian, terdapat enam koset kanan yang berbeda dari H di $\mathbb{Z}$.

Koset-koset kanan dari H di $\mathbb{Z}$ adalah

H+0 = { ...., -18+0, -12+0, -6+0, 0+0, 6+0, 12+0, 18+0, }

H+1 = { ...., -18+1, -12+1, -6+1, 0+1, 6+1, 12+1, 18+1, ...} = { ...., -17, -11, -5, 1, 7, 13, 19,....}

H+2 = { ...., -18+2, -12+2, -6+2, 0+2, 6+2, 12+2, 18+2, ...} = { ...., -16, -10, -4, 2, 8, 14, 20,....}

H+3 = { ...., -18+3, -12+3, -6+3, 0+3, 6+3, 12+3, 18+3, ...} = { ...., -15, -9, -3, 3, 9, 15, 21,....}

H+4 = { ...., -18+4, -12+4, -6+4, 0+4, 6+4, 12+4, 18+4, ...} = { ...., -14, -8, -2, 4, 10, 16, 22,....}

H+5 = { ...., -18+5, -12+5, -6+5, 0+5, 6+5, 12+5, 18+5, ...} = { ...., -13, -7, -1, 5, 11, 17, 23,....}

H+6 = { ...., -18+6, -12+6, -6+6, 0+6, 6+6, 12+6, 18+6, ...} = { ...., -11, -5, 0, 6, 12, 18, 24,....}

= H+0

H+7 = { ...., -18+7, -12+7, -6+7, 0+7, 6+7, 12+7, 18+7, ...} = { ...., -11, -5, 1, 7, 13, 19, 25,....}

= H+1

Dan seterusnya

H+-1 = { ...., -18+-1, -12+-1, -6+-1, 0+-1, 6+-1, 12+-1, 18+-1, ...} = {...., -19, -13, -7, -1, 5, 11, 17,....} = H+5

H+-2 = { ...., -18+-2, -12+-2, -6+-2, 0+-2, 6+-2, 12+-2, 18+-2, ...} = {...., -20, -14, -8, -2, 4, 10,16,...} = H+4

H+-3 = { ...., -18+-3, -12+-3, -6+-3, 0+-3, 6+-3, 12+-3, 18+-3, ...} = {...., -21,-15, -9, -3, 3, 9, 15,....} = H+3

H+-4 = { ...., -18+-4, -12+-4, -6+-4, 0+-4, 6+-4, 12+-4, 18+-4, ...} = {..., -22, -16, -10, -4, 2, 8, 14,....} = H+2

H+-5 = { ...., -18+-5, -12+-5, -6+-5, 0+-5, 6+-5, 12+-5, 18+-5, ...} = {..., -23, -17, -11, -5, 1, 7, 13,....} = H+1

H+-6 = { ...., -18+-6, -12+-6, -6+-6, 0+-6, 6+-6, 12+-6, 18+-6, ...} = {..., -24, -18, -12, -6, 0, 6, 12,....} = H+0

H+-7 = { ...., -18+-7, -12+-7, -6+-7, 0+-7, 6+-7, 12+-7, 18+-7, ...} = {...,-25,-19,-13,-7,-1,5,11,....} = H+5

Dan seterusnya

Jadi, Koset-koset kanan dari H di $\mathbb{Z}$ yang berbeda adalah : H + 0, H + 1, H + 2, H + 3, H +4, H + 5 (ada 6 koset kanan yang berbeda)

Perhatikan bahwa

$$H + 0 \cup H + 1 \cup H + 2 \cup H + 3 \cup H + 4 \cup H + 5 = \mathbb{Z}$$

Contoh 2

$(\mathbb{Z}_{12}, +_{12})$ suatu group

$H = \{\overline{0}, \overline{6}\}$ subgroup dari $\mathbb{Z}_{12}$

Tentukan semua koset kanan dari H di $\mathbb{Z}_{12}$ yang berbeda

Jawab :

Penjelasannya :

Kita dapat menentukan semua koset kanan dari H di $\mathbb{Z}12$ dengan memilih elemen-elemen yang tidak termasuk dalam H dan menambahkan setiap elemen tersebut dengan setiap elemen di H. Dalam hal ini, kita dapat memilih elemen-elemen $\overline{1}$, $\overline{2}$, $\overline{3}$, $\overline{4}$, $\overline{5}$, $\overline{7}$, $\overline{8}$, $\overline{9}$, $\overline{10}$, dan $\overline{11}$ sebagai elemen-elemen yang tidak termasuk dalam H.

Maka, koset kanan dari H di $\mathbb{Z}12$ adalah sebagai berikut:

$\overline{1} + H = \{\overline{1} + \overline{0}, \overline{1} + \overline{6}\} = \{\overline{1}, \overline{7}\}$ $\overline{2} + H = \{\overline{2} + \overline{0}, \overline{2} + \overline{6}\} = \{\overline{2}, \overline{8}\}$ $\overline{3} + H = \{\overline{3} + \overline{0}, \overline{3} + \overline{6}\} = \{\overline{3}, \overline{9}\}$ $\overline{4} + H = \{\overline{4} + \overline{0}, \overline{4} + \overline{6}\} = \{\overline{4}, \overline{10}\}$ $\overline{5} + H = \{\overline{5} + \overline{0}, \overline{5} + \overline{6}\} = \{\overline{5}, \overline{11}\}$ Jadi, terdapat lima koset kanan dari H di $\mathbb{Z}12$ yang berbeda.

$H +_{12} \overline{0} = \{\overline{0}, \overline{6}\}$

$H +_{12} \overline{1} = \{\overline{1}, \overline{7}\}$

$H +_{12} \overline{2} = \{\overline{2}, \overline{8}\}$

$H +_{12} \overline{3} = \{\overline{3}, \overline{9}\}$

$H +_{12} \overline{4} = \{\overline{4}, \overline{10}\}$

$H +_{12} \overline{5} = \{\overline{5}, \overline{11}\}$

$H +_{12} \overline{6} = \{\overline{6}, \overline{0}\} = \{\overline{0}, \overline{6}\}$

$H +_{12} \overline{7} = \{\overline{7}, \overline{1}\} = \{\overline{1}, \overline{7}\}$

$H +_{12} \overline{8} = \{\overline{2}, \overline{8}\}$

$H +_{12} \overline{9} = \{\overline{3}, \overline{9}\}$

$H +_{12} \overline{10} = \{\overline{4}, \overline{10}\}$

$H +_{12} \overline{11} = \{\overline{5}, \overline{11}\}$

Koset-koset kanan dari H di $\mathbb{Z}_{12}$ yang berbeda adalah

$H +_{12} \overline{1}$, $H +_{12} \overline{2}$, $H +_{12} \overline{3}$, $H +_{12} \overline{4}$, $H +_{12} \overline{5}$ (ada 5 koset kanan yang berbeda)

Perhatikan bahwa

$$H +_{12} \overline{1} \cup H +_{12} \overline{2} \cup H +_{12} \overline{3} \cup H +_{12} \overline{4} \cup H +_{12} \overline{5} = \mathbb{Z}_{12}$$

Teorema

Misalkan $(G,*)$ suatu group dan H subgroup dari G maka

$$G = \bigcup_{a \in G} H * a$$

Bukti :

Misalkan $(G,*)$ suatu gr0up dan H subgr0up dari G

Adt $G = \bigcup_{a \in G} H * a$ yaitu dengan menunjukkan : (1) $\bigcup_{a \in G} H * a \subseteq G$

(2) $G \subseteq \bigcup_{a \in G} H * a$

1. Karena setiap $a \in G$ berlaku $H * a \subseteq G$, maka

$$\bigcup_{a \in G} H * a \subseteq G$$

2. Ambil $x \in G$, maka x termuat dalam koset $H * x$. Karena $H * x \subseteq \bigcup_{a \in G} H * a$, maka $x \in \bigcup_{a \in G} H * a$.

   Ini berarti,

$$G \subseteq \bigcup_{a \in G} H * a$$

Teorema 2.4.1

Misalkan $(G,*)$ suatu group hingga dan H subgroup dari G maka

$$\boldsymbol{O(H)|O(G)}$$

Bukti :

Misalkan $G = \{e, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}\}$. $(G,*)$ suatu group dan H subgroup dari G

Misalkan $H * e, H * x_1, \dots, H * x_{t-1}$, $t - 1 \leq n$ adalah koset-koset kanan yang berbeda dari H di G, maka

$$G = H * e \cup H * x_1 \cup H * x_2 \cup \dots \cup H * x_{t-1}$$

Akibatnya

$$\begin{aligned} |G| &= |H * e| + |H * x_1| + |H * x_2| + \cdots + |H * x_{t-1}| \\ &= t|H * e| \qquad \text{(Lemma 2.4.5)} \\ &= t|H| \end{aligned}$$

Ini berarti

$t = \frac{|G|}{|H|}$ atau $O(H)|O(G)$

Definisi 12

Misalkan $(G,*)$ suatu group dan H subgroup dari G. Banyaknya koset-koset kanan dari H di G yang berbeda disebut **indeks dari H di G** yang ditulis sebagai $\boldsymbol{i_G(H)}$

(Dalam hal $(G,*)$ suatu group hingga maka

$$i_G(H) = \frac{O(G)}{O(H)}$$

Contoh 3

$(S_3,\circ)$ suatu group

$H = \{[1,2,3], [1,3,2]\}$ subgroup dari S_3

Tentukan $i_{S3}(H)$

Jawab :

Penjelasan :

Untuk menentukan $iS3(H)$, kita perlu mencari semua invers dari elemen-elemen dalam H terhadap operasi ∘ di $S3$.

Kita mulai dengan mencari invers dari [1,2,3]. Kita cari elemen dalam $S3$ yang jika dikalikan dengan [1,2,3] akan menghasilkan identitas, yaitu [1,2,3] ∘ x = e. Kita bisa mencoba satu-satu elemen dalam $S3$:

[1,2,3] ∘ [1,2,3] = [1,3,2]

[1,2,3] ∘ [1,3,2] = [2,1,3]

[1,2,3] ∘ [2,1,3] = [3,2,1]

[1,2,3] ∘ [2,3,1] = [1,2,3]

[1,2,3] ∘ [3,1,2] = [2,3,1]

[1,2,3] ∘ [3,2,1] = [3,1,2]

Ternyata tidak ada elemen dalam $S3$ yang jika dikalikan dengan [1,2,3] akan menghasilkan identitas. Oleh karena itu, [1,2,3] tidak memiliki invers dalam $S3$ dan $iS3$([1,2,3]) = ∅.

Selanjutnya, kita cari invers dari [1,3,2]. Kita cari elemen dalam $S3$ yang jika dikalikan dengan [1,3,2] akan menghasilkan identitas, yaitu [1,3,2] ∘ x = e. Kita bisa mencoba satu-satu elemen dalam $S3$:

[1,3,2] ∘ [1,2,3] = [2,1,3]

[1,3,2] ∘ [1,3,2] = [1,2,3]

[1,3,2] ∘ [2,1,3] = [3,2,1]

[1,3,2] ∘ [2,3,1] = [1,3,2]

[1,3,2] ∘ [3,1,2] = [2,3,1]

[1,3,2] ∘ [3,2,1] = [3,1,2]

Dari hasil di atas, kita dapat melihat bahwa [1,3,2] memiliki invers yaitu [1,3,2] sendiri. Oleh karena itu, $iS3([1,3,2]) = \{[1,3,2]\}$.

Jadi, $iS3(H) = \{[1,3,2]\}$.

(Dengan menggunakan Lemma 2.6.1 dan 2.6.3)

$$\begin{aligned}
H \circ [1,2,3] &= \{[1,2,3] \circ [1,2,3]\,, [1,3,2] \circ [1,2,3]\} \\
&= \{[1,2,3], [1,3,2]\} \\
H \circ [1,3,2] &= \{[1,2,3] \circ [1,3,2]\,, [1,3,2] \circ [1,3,2]\} \\
&= \{[1,3,2], [1,2,3]\} \\
H \circ [2,1,3] &= \{[1,2,3] \circ [2,1,3]\,, [1,3,2] \circ [2,1,3]\} \\
&= \{[2,1,3], [3,1,2]\} \\
H \circ [2,3,1] &= \{[1,2,3] \circ [2,3,1]\,, [1,3,2] \circ [2,3,1]\} \\
&= \{[2,3,1], [3,2,1]\} \\
H \circ [3,1,2] &= \{[1,2,3] \circ [3,1,2]\,, [1,3,2] \circ [3,1,2]\} \\
&= \{[3,1,2], [2,1,3]\} \\
H \circ [3,2,1] &= \{[1,2,3] \circ [3,2,1]\,, [1,3,2] \circ [3,2,1]\} \\
&= \{[3,2,1], [2,3,1]\}
\end{aligned}$$

Karena terdapat 3 buah koset kanan yang berbeda,yaitu $H \circ [1,2,3]$, $H \circ [2,1,3]$, dan $H \circ [2,3,1]$ maka $i_{S_3}(H) = 3$

Contoh 4

$(\mathbb{Z}, +)$ suatu group

$H = 6\mathbb{Z}$ subgroup dari $\mathbb{Z}$

$i_Z(H) = 6$

Contoh 5

$(\mathbb{Z}_{12}, +_{12})$ suatu group

$H = \{\bar{0}, \bar{6}\}$subgroup dari $\mathbb{Z}_{12}$

$$i_{Z12}(12) = \frac{O(\mathbb{Z}_{12})}{O(\mathbb{Z}_{12})} = \frac{12}{2} = 6$$

Penjelasannya :

- $\mathbb{Z}12$ adalah himpunan bilangan bulat modulo 12, yaitu {0, 1, 2, ..., 11}. Operasi grup yang digunakan adalah penjumlahan modulo 12, yaitu jika a, b ∈ $\mathbb{Z}12$, maka a + b = c mod 12, dengan c ∈ $\mathbb{Z}12$.

- $H = \{\bar{0}, \bar{6}\}$ adalah himpunan bagian dari $\mathbb{Z}12$ yang terdiri dari elemen-elemen yang menghasilkan sisa 0 atau 6 jika dibagi oleh 12. H juga merupakan grup dengan operasi yang sama seperti $\mathbb{Z}12$.

- $iZ12(H)$ adalah indeks H di dalam $\mathbb{Z}12$, yaitu banyaknya kelas koset H di dalam $\mathbb{Z}12$. Kita dapat menghitungnya sebagai berikut:

- Kita dapat menuliskan H sebagai $H = \{\bar{0} + 12k, \bar{6} + 12k\}$ untuk setiap k ∈ $\mathbb{Z}$. Artinya, setiap

elemen di dalam H dapat dinyatakan sebagai jumlah suatu elemen di dalam H dengan kelipatan 12. - Kita ingin mencari banyaknya kelas koset yang berbeda di dalam ℤ12. Misalnya, jika kita membagi ℤ12 menjadi dua kelas koset, yaitu H dan H' = {$\bar{1}$, $\bar{2}$, $\bar{3}$, $\bar{4}$, $\bar{5}$, $\bar{7}$, $\bar{8}$, $\bar{9}$, $\overline{10}$, $\overline{11}$}, maka setiap elemen di dalam ℤ12 akan termasuk ke salah satu kelas koset tersebut. - Namun, kita perlu memastikan bahwa setiap kelas koset yang kita bentuk tidak memiliki elemen yang sama. Misalnya, jika kita membagi ℤ12 menjadi dua kelas koset, yaitu H dan H', maka $\bar{0} \in H$ dan $\bar{6} \in H'$, sehingga kelas koset H dan H' memiliki elemen yang sama, yaitu $\bar{0}$ dan $\bar{6}$. - Oleh karena itu, kita hanya perlu membagi ℤ12 menjadi dua kelas koset yang tidak memiliki elemen yang sama. Kita dapat melakukannya dengan membagi ℤ12 menjadi H dan H + 6 = {$\bar{6}$, $\bar{0}$ + 6, $\bar{1}$ + 6, ..., $\bar{5}$ + 6}. Dengan demikian, setiap elemen di dalam ℤ12 akan termasuk ke salah satu kelas koset tersebut. - Jumlah kelas koset yang kita bentuk adalah 2, yaitu H dan H + 6. Oleh karena itu, indeks H di dalam ℤ12 adalah 2, dan indeks H + 6 di dalam ℤ12 juga adalah 2. Total indeks adalah 4, yang sesuai dengan orde grup ℤ12. - Kesimpulannya, $iZ12(H)$ = 2, yang artinya terdapat dua kelas koset dalam ℤ12 yang membentuk himpunan bagian H. Karena $iZ12(H)$ = 2 < ∞, maka H adalah subgroup dari ℤ12.

Definisi 13

Misalkan $(G,*)$ suatu group dan $a \in G$. Bilangan bulat positif terkecil $\boldsymbol{m}$ yang memenuhi $\boldsymbol{a^m}$ = $\boldsymbol{e}$ disebut **orde dari $\boldsymbol{a}$** atau **periode dari $\boldsymbol{a}$** yang ditulis sebagai

$$\boldsymbol{O(a)} \text{ atau } \boldsymbol{p(a)}$$

Contoh 6

$(\mathbb{Z}_{12}, +_{12})$ suatu group, $a = \bar{2} \in \mathbb{Z}_{12}$, tentukan $O(a)$

$\bar{2}^1 = \bar{2}, \bar{2}^2 = \bar{4}, \bar{2}^3 = \bar{6},$ $\bar{2}^4 = \bar{8},\ \bar{2}^5 = \overline{10},\ \bar{2}^6 = \bar{0}$ Jadi, $O(\bar{2}) = 6$	Dengan cara yang sama dapat ditunjukkan bahwa $O(\bar{0}) = 1$, $O(\bar{6}) = 2$, $O(\bar{1}) = 12$, $O(\bar{7}) = 12$, $O(\bar{8}) = 3$, $O(\bar{3}) = 4$, $O(\bar{9}) = 4$, $O(\bar{4}) = 3$, $O(\overline{10}) = 6$, $O(\bar{5}) = 12$, $O(\overline{11}) = 12$

Teorema *

Misalkan $(G,*)$ suatu group dan $a \in G$ maka

$$\boldsymbol{H} = \{\boldsymbol{a^n} | \boldsymbol{n} \in \mathbb{Z}\} \text{ subgroup dari } G$$

Bukti :

Misalkan $(G,*)$ suatu group dan $a \in G$. Adt $H = \{a^n | n \in \mathbb{Z}\}$ subgroup dari G

1. Adt $H \subseteq G$

   Ambil $x \in H$ Adt $x \in G$

Karena $x \in H$ dan $H = \{a^n | n \in \mathbb{Z}\}$ maka

$$x = a^{n_1} \text{ untuk suatu } n_1 \in \mathbb{Z}$$

Kasus 1 : $n_1 = 0$

$$x = a^{n_1} = a^0 = e \in G \ (G \text{ group})$$

Kasus 2 : $n_1 > 0$

$$x = a^{n_1} = \underbrace{a * a * \ldots * a}_{n_1 \text{ buah}} \in G \ (G \text{ group})$$

Kasus 3 : $n_1 < 0$

$$x = a^{n_1} = \underbrace{a^{-1} * a^{-1} * \ldots * a^{-1}}_{-n_1 \text{ buah}} \in G \ (G \text{ group})$$

$\therefore H \subseteq G$

2. Adt $H \neq \emptyset$

Karena $1 \in \mathbb{Z}$ dan $H = \{a^n | n \in \mathbb{Z}\}$ maka $a^1 \in H$ *atau* $a \in H$

$\therefore H \neq \emptyset$

3. Adt setiap $x, y \in H$ berlaku $x * y \in H$

Ambil $x, y \in H$ Adt $x * y \in H$

Karena $x, y \in H$ dan $H = \{a^n | n \in \mathbb{Z}\}$ maka

$$x = a^{n_1}, y = a^{n_2} \text{ untuk suatu } n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$$

Perhatikan bahwa

$$x * y = a^{n_1} * a^{n_2} = a^{n_1 * n_2}$$

Karena $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$ maka $n_1 * n_2 \in \mathbb{Z}$. Tulis $n_1 * n_2 = n_3$ maka

$$x * y = a^{n_1} * a^{n_2} = a^{n_1 * n_2} = a^{n_3} \in H$$

4. Adt setiap $x \in H$ berlaku $x^{-1} \in H$

Ambil $x \in H$ Adt $x^{-1} \in H$

Karena $x \in H$ dan $H = \{a^n | n \in \mathbb{Z}\}$ maka

$$x = a^{n_1} \text{ untuk suatu } n_1 \in \mathbb{Z}$$

Pilih $x^{-1} = a^{-n_1}$ maka

$$x * x^{-1} = a^{n_1} * a^{-n_1} = a^{n_1 * -n_1} = a^0 = e$$

$$x^{-1} * x = a^{-n_1} * a^{n_1} = a^{-n_1 * n_1} = a^0 = e$$

Karena $n_1 \in \mathbb{Z}$ maka $-n_1 \in \mathbb{Z}$ sehingga

$$x^{-1} = a^{-n_1} \in H$$

Karena 1,2,3, dan 4 maka H subgroup dari G.

Akibat 1

Misalkan $(G,*)$ suatu group hingga dan $a \in G$ maka

$$O(a)|O(G)$$

Bukti :

Misalkan $(G,*)$ suatu group hingga dan $a \in G$ Adt $O(a)|O(G)$

Misalkan $O(a) = n$

Tulis $H = \{a^l | l \in \mathbb{Z}\}$, maka menurut Teorema *, H subgroup dari G (Teorema *)

Karena G suatu group hingga maka H juga hingga. Karena $O(a) = n$,maka $H = \{a, a^2, a^3, \dots , a^n\}$.

Karena H subgroup dari G dengan $O(H) = n = O(a)$

maka menurut Teorema 2.4.1 (Teorema 2.4.1)

$$O(H)|O(G) \text{ atau } O(a)|O(G)$$

Akibat 2

Misalkan $(G,*)$ suatu group hingga dan $a \in G$ maka $a^{O(G)} = e$

Bukti :

Misalkan $(G,*)$ suatu group hingga dan $a \in G$

Menurut Akibat 1, $O(a)|O(G)$, ini berarti ada $t \in \mathbb{N}$ sehingga

$$O(G) = tO(a)$$

Perhatikan bahwa

$$a^{O(G)} = a^{tO(a)} = (a^{O(a)})^t = e^t = e$$

Definisi 14

Misalkan $(G,*)$ suatu group dan H subgroup dari G. H disebut **subgroup normal** dari G jikasetiap $g \in G$ dan $h \in H$ berlaku

$$\boldsymbol{ghg^{-1} \in H}$$

Contoh 7

$G = \left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \middle| \, a, d \in \mathbb{R} \neq 0\right\}$, G membentuk group terhadap operasi perkalian matriks.
Periksa apakah

$$H = \left\{\begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} \middle| \, b, c \in \mathbb{R}, \mathrm{bc} = 1\right\}$$

subgroup normal dari G?

Jawab :

1. Adt $H \subseteq G$

   Ambil $x \in H$ akan ditunjukkan $x \in G$

Karena $x \in H$ dan $H = \left\{\begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} \middle| \, b, c \in \mathbb{R}, \mathrm{bc} = 1\right\}$ maka

$x = \begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & c_1 \end{pmatrix}$ untuk suatu $b_1, c_1 \in \mathbb{R}$ dan $b_1, c_1 = 1$

Karena $b_1 . c_1 \in \mathbb{R}$ dan $b_1 . c_1 = 1 \neq 0$

maka $x = \begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & c_1 \end{pmatrix} \in G$

$\therefore H \subseteq G$

2. Karena $1 \in \mathbb{R}$ dan $1.1 = 1$ maka

$$i = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in H$$

$\therefore H \neq \emptyset$

3. Ambil $x, y \in H$ akan ditunjukkan $x . y \in H$

   Karena $x, y \in H$ dan $H = \left\{\begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} \middle| \, b, c \in \mathbb{R}, \mathrm{bc} = 1\right\}$ maka $x = \begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & c_1 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} b_2 & 0 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix}$

   untuk suatu $b_1, b_2, c_1, c_2 \in R$ dan $b_1 . c_1 = 1, b_2 . c_2 = 1$

Perhatikan bahwa

$$x . y = \begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & c_1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} b_2 & 0 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 . b_2 & 0 \\ 0 & c_1 . c_2 \end{pmatrix}$$

Karena

Karena, $b_1, b_2, c_1, c_2 \in R$ dan $b_1 . c_1 = 1, b_2 . c_2 = 1$

Maka , $b_1.b_2, c_1.c_2 \in R$ dan $(b_1.b_2)(c_1.c_2) = (b_1.c_1).(b_2.c_2) = 1.1 = 1$

Ini berarti,

$$x.y = \begin{pmatrix} b_1b_2 & 0 \\ 0 & c_1c_2 \end{pmatrix} \in H$$

4. Ambil $x \in H$ akan ditunjukkan $x^{-1} \in H$

   Karena $x \in H$ dan $H = \left\{\begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} \middle| b, c \in \mathbb{R}, \text{bc} = 1\right\}$ maka $x = \begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & c_1 \end{pmatrix}$ untuk suatu $b_1, c_1 \in R\ dan\ b_1.c_1 = 1$

   Karena $b_1, c_1 = 1\ maka\ b_1 \neq 0, c_1 \neq 0$

   akibatnya

$$\frac{1}{b_1}, \frac{1}{c_1} \in R\ dan\ \frac{1}{b_1}.\frac{1}{c_1} = \frac{1}{b_1.c_1} = \frac{1}{1} = 1$$

Pilih $x^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{b_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{c_1} \end{pmatrix}$ maka $x^{-1} \in H$

5. Ambil $g \in G$ dan $h \in H$ akan ditunjukkan $ghg^{-1} \in H$

   Karena $g \in G$ dan

$G = \left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \middle| a, d \in \mathbb{R}, \text{ad} \neq 0\right\}$ maka

$$g = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & d_1 \end{pmatrix}\ untuk\ suatu\ a_1d_1 \in R\ dan\ a_1d_1 \neq 0$$

Karena $h \in H$ dan $H = \left\{\begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} \middle| b, c \in \mathbb{R}, \text{b.c} = 1\right\}$maka

$h = \begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & c_1 \end{pmatrix}$ untuk suatu $b_1c_1 \in R\ dan\ b_1.c_1 = 1$

Perhatikan bahwa

$$ghg^{-1} = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & d_1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & c_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{a_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{d_1} \end{pmatrix}$$

$= \begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & c_1 \end{pmatrix} \in H$

($S3$,∘) suatu grup

H = {[1,2,3], [2,3,1], [3,1,2]} subgroup dari $S3$

Periksa apakah H subgroup normal dari $S3$

Karena 1,2,3,4, dan 5 maka H subgroup normal dari G

Contoh 8

$(S_3, \circ)$ suatu grup

$H = \{[1,2,3], [2,3,1], [3,1,2]\}$ subgroup dari S_3

Periksa apakah H subgroup normal dari S_3

Jawab :

$$\left.\begin{matrix} g = [1,2,3] \\ h = [1,2,3] \end{matrix}\right\} g \circ h \circ g^{-1} = [1,2,3] \circ [1,2,3] \circ [1,2,3] = [1,2,3] \in H$$

$$\left.\begin{matrix} g = [1,2,3] \\ h = [2,3,1] \end{matrix}\right\} g \circ h \circ g^{-1} = [1,2,3] \circ [2,3,1] \circ [1,2,3] = [2,3,1] \in H$$

$$\left.\begin{matrix} g = [1,2,3] \\ h = [3,1,2] \end{matrix}\right\} g \circ h \circ g^{-1} = [1,2,3] \circ [3,1,2] \circ [1,2,3] = [3,1,2] \in H$$

$$\left.\begin{matrix} g = [1,3,2] \\ h = [1,2,3] \end{matrix}\right\} g \circ h \circ g^{-1} = [1,3,2] \circ [1,2,3] \circ [1,3,2] = [1,2,3] \in H$$

$$\left.\begin{matrix} g = [1,3,2] \\ h = [2,3,1] \end{matrix}\right\} g \circ h \circ g^{-1} = [1,3,2] \circ [2,3,1] \circ [1,3,2] = [3,2,1] \circ [1,3,2]$$
$$= [3,1,2] \in H$$

$$\left.\begin{matrix} g = [1,3,2] \\ h = [3,1,2] \end{matrix}\right\} g \circ h \circ g^{-1} = [1,3,2] \circ [3,1,2] \circ [1,3,2] = [2,1,3] \circ [1,3,2]$$
$$= [2,3,1] \in H$$

$$\left.\begin{matrix} g = [2,1,3] \\ h = [1,2,3] \end{matrix}\right\} g \circ h \circ g^{-1} = [2,1,3] \circ [1,2,3] \circ [2,1,3] = [2,1,3] \circ [2,1,3]$$
$$= [1,2,3] \in H$$

$$\left.\begin{matrix} g = [2,1,3] \\ h = [2,3,1] \end{matrix}\right\} g \circ h \circ g^{-1} = [2,1,3] \circ [2,3,1] \circ [2,1,3] = [1,3,2] \circ [2,1,3]$$
$$= [3,1,2] \in H$$

$$\left.\begin{matrix} g = [2,1,3] \\ h = [3,1,2] \end{matrix}\right\} g \circ h \circ g^{-1} = [2,1,3] \circ [3,1,2] \circ [2,1,3] = [3,2,1] \circ [2,1,3]$$
$$= [2,3,1] \in H$$

$$\left.\begin{matrix} g = [2,3,1] \\ h = [1,2,3] \end{matrix}\right\} g \circ h \circ g^{-1} = [2,3,1] \circ [1,2,3] \circ [3,1,2] = [2,3,1] \circ [3,1,2]$$
$$= [1,2,3] \in H$$

$$\left.\begin{matrix} g = [2,3,1] \\ h = [2,3,1] \end{matrix}\right\} g \circ h \circ g^{-1} = [2,3,1] \circ [2,3,1] \circ [3,1,2] = [3,1,2] \circ [3,1,2]$$
$$= [2,3,1] \in H$$

$$\left.\begin{matrix} g = [2,3,1] \\ h = [3,1,2] \end{matrix}\right\} g \circ h \circ g^{-1} = [2,3,1] \circ [3,1,2] \circ [3,1,2] = [1,2,3] \circ [3,1,2]$$
$$= [3,1,2] \in H$$

$$\left.\begin{matrix} g = [3,1,2] \\ h = [1,2,3] \end{matrix}\right\} g \circ h \circ g^{-1} = [3,1,2] \circ [1,2,3] \circ [2,3,1] = [3,1,2] \circ [2,3,1]$$
$$= [1,2,3] \in H$$

$$\left.\begin{matrix} g = [3,1,2] \\ h = [2,3,1] \end{matrix}\right\} g \circ h \circ g^{-1} = [3,1,2] \circ [2,3,1] \circ [2,3,1] = [1,2,3] \circ [2,3,1]$$
$$= [2,3,1] \in H$$

$$\left.\begin{array}{l} g = [3,1,2] \\ h = [3,1,2] \end{array}\right\} g \circ h \circ g^{-1} = [3,1,2] \circ [3,1,2] \circ [2,3,1] = [2,3,1] \circ [2,3,1]$$

$$= [3,1,2] \in H$$

$$\left.\begin{array}{l} g = [3,2,1] \\ h = [1,2,3] \end{array}\right\} g \circ h \circ g^{-1} = [3,2,1] \circ [1,2,3] \circ [3,2,1] = [3,2,1] \circ [3,2,1]$$

$$= [1,2,3] \in H$$

$$\left.\begin{array}{l} g = [3,2,1] \\ h = [2,3,1] \end{array}\right\} g \circ h \circ g^{-1} = [3,2,1] \circ [2,3,1] \circ [3,2,1] = [2,1,3] \circ [3,2,1]$$

$$= [3,1,2] \in H$$

$$\left.\begin{array}{l} g = [3,2,1] \\ h = [3,1,2] \end{array}\right\} g \circ h \circ g^{-1} = [3,2,1] \circ [3,1,2] \circ [3,2,1] = [1,3,2] \circ [3,1,2]$$

$$= [2,3,1] \in H$$

Karena setiap $g \in G, h \in H$ berlaku $ghg^{-1} \in H$ maka H subgroup normal dari S_3

Contoh 9

$(S_3,\circ)$ suatu group

$H = \{[1,2,3],[1,3,2]\}$ subgroup dari S_3

Tunjukkan bahwa H bukan subgroup normal dari S_3

Jawab :

$$\left.\begin{array}{l} g = [2,1,3] \\ h = [1,3,2] \end{array}\right\} g \circ h \circ g^{-1} = [2,1,3] \circ [1,3,2] \circ [2,1,3] = [2,3,1] \circ [2,1,3]$$

$$= [3,2,1] \notin H$$

Karena terdapat $g = [2,1,3] \in S_3$ dan $h[1,3,2] \in H$ sehingga $g \circ h \circ g^{-1} \notin H$ maka H bukan subgroup normal dari S_3

Contoh 10

$G = \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} | a,b,c,d \in \mathbb{R}, ad - bc \neq 0\}$, $(G,\cdot)$ suatu group.

$N = \{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} | a,d \in \mathbb{R}, ad \neq 0\}$, N subgroup dari G

Periksa apakah N subgroup normal dari G?

Periksa apakah N subgroup normal dari G?

Jawab

Akan diperiksa apakah setiap $g \in G$ dan $n \in N$ berlaku $gng^{-1} \in N$

Ambil $g = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \in G$ dan $n = \begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix} \in N$, maka :

$$g^{-1} = \frac{1}{a_1d_1 - b_1c_1}\begin{pmatrix} d_1 & -b_1 \\ -c_1 & a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{d_1}{a_1d_1-b_1c_1} & \frac{-b_1}{a_1d_1-b_1c_1} \\ \frac{-c_1}{a_1d_1-b_1c_1} & \frac{a_1}{a_1d_1-b_1c_1} \end{pmatrix}$$

Perhatikan bahwa

$$gng^{-1} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{d_1}{a_1d_1 - b_1c_1} & \frac{-b_1}{a_1d_1 - b_1c} \\ \frac{-c_1}{a_1d_1 - b_1c_1} & \frac{a_1}{a_1d_1 - b_1c} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_1a_2 & b_1d_2 \\ c_1a_2 & d_1d_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{d_1}{a_1d_1-b_1c_1} & \frac{-b_1}{a_1d_1-b_1c_1} \\ \frac{-c_1}{a_1d_1-b_1c_1} & \frac{a_1}{a_1d_1-b_1c_1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{a_1a_2d_1-b_1d_2c_1}{a_1d_1-b_1c_1} & \frac{-a_1a_2b_1+b_1d_2a_1}{a_1d_1-b_1c_1} \\ \frac{c_1a_2d_1-d_1d_2c_1}{a_1d_1-b_1c_1} & \frac{-c_1a_2b_1+d_1d_2a_1}{a_1d_1-b_1c_1} \end{pmatrix}$$

$1 \quad 0$

Jadi, ada g= $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in G$ dan $n = \begin{pmatrix} & \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ sehingga

$$\begin{aligned} gng^{-1} &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \notin N \end{aligned}$$

Maka N bukan subgroup normal

Lemma 2.6.1 Misalkan $(G,*)$ suatu group dan H subgroup dari G. H subgroup normal dari $G \Leftrightarrow \forall g \in G$ berlaku $g * H * g^{-1} = H$

Bukti :

Misalkan $(G,*)$ suatu group dan H subgroup dari G. Akan ditunjukkan H subgroup normal dari $G \Leftrightarrow \forall g \in G$ berlaku $g * H * g^{-1} = H$

$(\Rightarrow)$ Misalkan H subgroup normal dari G

Akan ditunjukkan $\forall g \in G$ berlaku $g * H * g^{-1} = H$, yaitu dengan menunjukkan

$$(i)\ g * H * g^{-1} \subseteq H \text{ dan } (ii)\ H \subseteq g * H * g^{-1}$$

(i) Ambil $g \in G$, adt $g * H * g^{-1} \subseteq H$

Ambil $x \in g * H * g^{-1}$ akan ditunjukkan $x \in H$.

Karena $x \in g * H * g^{-1}$ dan $g * H * g^{-1} = \{g * h * g^{-1} | h \in H\}$ maka

$$x = g * h_1 * g^{-1} \text{ untuk suatu } h_1 \in H$$

Karena $g \in G, h_1 \in H$ dan H subgroup normal maka

$$x = g * h_1 * g^{-1} \in H$$

Ini berarti,

$$g * H * g^{-1} \subseteq H$$

(ii) Ambil $g \in G$, akan ditunjukkan $H \subseteq g * H * g^{-1}$

Ambil x $\in H$. Perhatikan bahwa:

Dengan menggunakan unsur identitas pada definisi 1 $e = g * g^{-1}\ dimana\ g^{-1} = b\ merupakan\ \ invers\ dari\ a$

$$x = e * x * e = (g * g^{-1}) * x * (g * g^{-1}) = g * (g^{-1} * x * g) * g^{-1}$$

$$= g * (g^{-1} * x * (g^{-1})^{-1}) * g^{-1}$$

Karena $g \in G$, x $\in H$ dan H subgroup normal, maka

$g^{-1} * x * (g^{-1})^{-1} \in H$. (Berdasarkan Lemma 2.3.1) bahwa $(g^{-1})^{-1} = g$, akibatnya

$$x = g * h_1 * g^{-1}$$

Sehingga

Ini berarti, $x = g * h_1 * g^{-1} \in \{g * h * g^{-1} | h \in H\} = g * H * g^{-1}$

$$H \subseteq g * H * g^{-1}$$

($\Leftarrow$) Misalkan $\forall g \in G$ berlaku $g * H * g^{-1} = H$.

Akan ditunjukkan H subgroup normal dari G yaitu dengan menunjukkan $\forall g \in G$ dan $h \in H$ berlaku $g * h * g^{-1} \in H$

Ambil $g \in G$ dan $h \in H$ akan ditunjukkan $g * h * g^{-1} \in H$.Karena $g * H * g^{-1} = H$ maka

$$g * H * g^{-1} \subseteq H$$

Selanjutnya, karena $g * H * g^{-1} \subseteq H$ dan $g * H * g^{-1} = \{ g * h * g^{-1} | \hbar \in H\}$, maka

setiap $h \in H$ berlaku $g * h * g^{-1} \in H$

Jadi, setiap $g \in G$ dan $h \in H$ akan berlaku

$$g * h * g^{-1} \in H.$$

Lemma 2.6.2

Misalkan $(G,*)$ suatu group dan H subgroup dari G.

H subgroup normal dari $G \Leftrightarrow \forall g \in G$ berlaku $g * H = H * g$

Bukti :

Misalkan $(G,*)$ suatu group dan H subgroup dari G. Akan ditunjukkkan H subgroup normal dari $G \Leftrightarrow \forall g \in G$ berlaku $g * H = H * g$

($\Rightarrow$) Misalkan H subgroup dari G akan ditunjukkan $\forall g \in G$ berlaku $g * H = H * g$

Ambil $g \in G$ akan ditunjukkan $g * H = H * g$

Karena $g \in G$ dan H subgroup normal dari G, maka menurut Lemma 2.6.1

$$g * H * g^{-1} = H$$

Perhatikan bahwa :

$$g * H * g^{-1} = H$$

$\{g * H * g^{-1} | h \in H\} = H$ (Berdasarkan lemma 2.6.1) diperoleh

$\{g * H * g^{-1} | h \in H\} * g = H * g$ $\quad \forall g \in G\ dapat\ ditulis$

$\{(g * H * g^{-1}) * g | h \in H\} = H * g$

Berdasarkan definisi 1 bahwa $g * g^{-1} = e$ dan $e * g = g$ sehingga diperoleh

$$\{g * H | h \in H\} = H * g$$

$$g * H = H * g$$

($\Leftarrow$) Misalkan $\forall g \in G$ berlaku $g * H = H * g$ akan ditunjukkan H subgroup normal dari G yaitu dengan menunjukkan $\forall g \in G$ berlaku $g * H * g^{-1} = H$ (Lemma 2.6.1)

Ambil $g \in G$, maka menurut premis berlaku $g * H = H * g$

Perhatikan bahwa :

$g * H = H * g$
$(g * H) * g^{-1} = (H * g) * g^{-1}$
(Berdasarkan definisi 1) terdapat unsur identitas $g * g^{-1} = e$ dan $e * H = H$ sehingga diperoleh
$g * H * g^{-1} = H$

Lemma 2.6.3
Misalkan $(G,*)$ suatu group dan H subgroup dari G. H subgroup normal dari G $\Leftrightarrow$ $\forall a, b \in G$ berlaku $(H * a) * (H * b) = H * (a * b)$

Bukti :

Misalkan $(G,*)$ suatu group dan H subgroup dari G. Akan ditunjukkan
H subgroup normal dari $G \Leftrightarrow \forall a, b \in G$ berlaku $(H * a) * (H * b) = H * (a * b)$

($\Rightarrow$) Misalkan H subgroup normal dari G. Akan ditunjukkan

$$\forall a, b \in G \text{ berlaku } (H * a) * (H * b) = H * (a * b)$$

Ambil $a, b \in G$. Perhatikan bahwa:

$(H * a) * (H * b)$ menggunakan sifat asosiatif,segingga

$= H * (a * H) * b$

$= H * (H * a) * b$ gunakan sifat komutatif, maka

$= (H * H) * (a * b)$

$= H * (a * b)$

($\Leftarrow$) Misalkan H subgroup dari G dan setiap $a, b \in G$ berlaku

$$(H * a) * (H * b) = H * (a * b)$$

Akan ditunjukan bahwa H subgroup normal. Berdasarkan definisi dari subgroup normal, yaitu dengan menunjukkan bahawa setiap $g \in G$ dan setiap $h \in H$ berlaku

$$g * h * g^{-1} \in H. \quad \text{(berdasarkan definisi 14)}$$

Karena setiap $a\,, b \in G$ berlaku $(H * a) * (H * b) = H * (a * b)$ maka

$$H{=}H{*}e$$

menggunakan unsur identitas $e = g * g^{-1}$ diperoleh

$$= H * (g * g^{-1})$$

$$= (H * g) * (H * g^{-1})$$

Ambil sebarang $h \in H$ dan $g \in G$. Perhatikan bahwa :

$g * h * g^{-1}$

Menggunakan unsur identitas $e = g * g^{-1}$ untuk membuktikan $g * h * g^{-1} = H$

$= e * (g * h * g^{-1})$

$= (e * g) * (h * g^{-1}) \ \in \{(h_1 * g) * (h_2 * g^{-1}) | \ h_1, h_2 \in H\ \}$

$= H * g * H * g^{-1}$
$= H$ (e $\in H$, karena H subgroup)

Karena g dan h diambil sebarang, maka dapat disimpulkan bahwa setiap $g \in G$ dan $h \in H$ berlaku $g * H * g^{-1} \in H$.

Contoh:

$(S_3, \circ)$ suatu group. Dengan menggunakan Lema 2.6.1, Lema 2.6.2, dan Lemma 2.6.3tunjukkan bahwa:
$H = \{[1,2,3], [2,3,1], [3,1,2]\}$ suatu subgroup normal dan $H = \{[1,2,3], [1,3,2]\}$ bukansubgroup normal.

Jawab:

1**. Menggunakan Lemma 2.6.1**

Dengan menggunakan Lemma 2.6.1, akan ditunjukkan bahwa $H = \{[1,2,3], [2,3,1], [3,1,2]\}$ subgroup normal dari $S_3 = \{[1,2,3], [1,3,2], [2,1,3], [2,3,1], [3,1,2], [3,2,1]\}$, yaitu dengan menunjukkan

$$\forall g \in S_3 \text{ berlaku } g * H * g^{-1} = H$$

$$(1).\ [1,2,3] \circ H \circ [1,2,3]^{-1} = \{\overset{g}{\uparrow}{[1,2,3]} \circ \overset{H}{\uparrow}{[1,2,3]} \circ \overset{g^{-1}}{\uparrow}{[1,2,3]}, \overset{g}{\uparrow}{[1,2,3]} \circ \overset{H}{\uparrow}{[2,3,1]} \circ \overset{g^{-1}}{\uparrow}{[1,2,3]}, \overset{g}{\uparrow}{[1,2,3]} \circ \overset{H}{\uparrow}{[3,1,2]} \circ \overset{g^{-1}}{\uparrow}{[1,2,3]}\} = \{\overset{H}{\uparrow}{[1,2,3]}, \overset{H}{\uparrow}{[2,3,1]}, \overset{H}{\uparrow}{[3,1,2]}\} = H$$

$(2). [1,3,2] \circ H \circ [1,3,2]^{-1} = \{[1,3,2] \circ [1,2,3] \circ [1,3,2], [1,3,2] \circ [2,3,1] \circ [1,3,2], [1,3,2] \circ [3,1,2] \circ [1,3,2]\} = \{[1,2,3], [3,1,2], [2,3,1]\} = H$

$(3). [2,1,3] \circ H \circ [2,1,3]^{-1} = \{[2,1,3] \circ [1,2,3] \circ [2,1,3], [2,1,3] \circ [2,3,1] \circ [2,1,3], [2,1,3] \circ [3,1,2] \circ [2,1,3]\} = \{[1,2,3], [3,1,2], [2,3,1]\} = H$

$(4). [2,3,1] \circ H \circ [2,3,1]^{-1} = \{[2,3,1] \circ [1,2,3] \circ [3,1,2], [2,3,1] \circ [2,3,1] \circ [3,1,2], [2,3,1] \circ [3,1,2] \circ [3,1,2]\} = \{[1,2,3], [2,3,1], [3,1,2] = H$

$(5). [3,1,2] \circ H \circ [3,1,2]^{-1} = \{[3,1,2] \circ [1,2,3] \circ [2,3,1], [3,1,2] \circ [2,3,1] \circ [2,3,1], [3,1,2] \circ [3,1,2] \circ [2,3,1]\} = \{[1,2,3], [2,3,1], [3,1,2]\} = H$

$(6). [3,2,1] \circ H \circ [3,2,1]^{-1} = \{[3,2,1] \circ [1,2,3] \circ [3,2,1], [3,2,1] \circ [2,3,1] \circ [3,2,1], [3,2,1] \circ [3,1,2] \circ [3,2,1]\} = \{[1,2,3], [3,1,2], [2,3,1]\} = H$

Karena $\forall g \in S_3$ berlaku $g \circ H \circ g^{-1} = H$, maka

$H = \{[1,2,3], [2,3,1], [3,1,2]\}$ subgroup normal dari S_3.

Dengan menggunakan Lemma 2.6.1, akan ditunjukkan bahwa $H = \{[1,2,3], [1,3,2]\}$ bukan subgroup normal dari $S_3 = \{[1,2,3], [1,3,2], [2,1,3], [2,3,1], [3,1,2], [3,2,1]\}$, yaitu dengan menunjukkan

Ada $g \in S_3$ sehingga $g * H * g^{-1} \neq H$

$(1). [1,2,3] \circ H \circ [1,2,3]^{-1} = \{[1,2,3] \circ [1,2,3] \circ [1,2,3], [1,2,3] \circ [1,3,2] \circ [1,2,3]\}$

$= \{[1,2,3], [1,3,2]\} = H$

$(2). [1,3,2] \circ H \circ [1,3,2]^{-1} = \{[1,3,2] \circ [1,2,3] \circ [1,3,2], [1,3,2] \circ [1,3,2] \circ [1,3,2]\}$

$= \{[1,2,3], [1,3,2]\} = H$

$(3). [2,1,3] \circ H \circ [2,1,3]^{-1} = \{[2,1,3] \circ [1,2,3] \circ [2,1,3], [2,1,3] \circ [1,3,2] \circ [2,1,3]\}$

$= \{[1,2,3], [3,2,1]\} \neq H$

Karena ada $g = [2,1,3] \in S_3$ sehingga $g * H * g^{-1} \neq H$ maka $H = \{[1,2,3], [1,3,2]\}$ bukan subgroup normal dari S_3.

2 . Menggunakan Lemma 2.6.2

Dengan menggunakan Lemma 2.6.2, akan ditunjukkan bahwa $H = \{[1,2,3], [2,3,1], [3,1,2]\}$ subgroup normal dari $S_3 = \{[1,2,3], [1,3,2], [2,1,3], [2,3,1], [3,1,2], [3,2,1]\}$, yaitu dengan menunjukkan

$\forall g \in S_3$ berlaku $g * H = H * g$

$(1). [1,2,3] \circ H = \{[1,2,3] \circ [1,2,3], [1,2,3] \circ [2,3,1], [1,2,3] \circ [3,1,2]\}$

$= \{[1,2,3], [2,3,1], [3,1,2]\}$

$$H \circ [1,2,3] = \{[1,2,3] \circ [1,2,3], [2,3,1] \circ [1,2,3], [3,1,2] \circ [1,2,3]\}$$

$$= \{[1,2,3], [2,3,1], [3,1,2]\}$$

Untuk g = [1,2,3] berlaku

$$[1,2,3] \circ H = H \circ [1,2,3]$$

$$(2). [1,3,2] \circ H = \{[1,3,2] \circ [1,2,3], [1,3,2] \circ [2,3,1], [1,3,2] \circ [3,1,2]\}$$

$$= \{[1,3,2], [3,2,1], [2,1,3]\}$$

$$H \circ [1,3,2] = \{[1,2,3] \circ [1,3,2], [2,3,1] \circ [1,3,2], [3,1,2] \circ [1,3,2]\}$$

$$= \{[1,3,2], [2,1,3], [3,2,1]\}$$

Untuk g = [1,3,2] berlaku

$$[1,3,2] \circ H = H \circ [1,3,2]$$

$$(3). [2,1,3] \circ H = \{[2,1,3] \circ [1,2,3], [2,1,3] \circ [2,3,1], [2,1,3] \circ [3,1,2]\}$$

$$= \{[2,3,1], [1,3,2], [3,2,1]\}$$

$$H \circ [2,1,3] = \{[1,2,3] \circ [2,1,3], [2,3,1] \circ [2,1,3], [3,1,2] \circ [2,1,3]\}$$

$$= \{[2,1,3], [3,2,1], [1,3,2]\}$$

Untuk g = [2,1,3] berlaku

$$[2,1,3] \circ H = H \circ [2,1,3]$$

$$(4). [2,3,1] \circ H = [2,3,1] \circ [1,2,3], [2,3,1] \circ [2,3,1], [2,3,1] \circ [3,1,2]\}$$

$$= \{[2,3,1], [3,1,2], [1,2,3]\}$$

$$H \circ [2,3,1] = \{[1,2,3] \circ [2,3,1], [2,3,1] \circ [2,3,1], [3,1,2] \circ [2,3,1]\}$$

$$= \{[2,3,1], [3,1,2], [1,2,3]\}$$

Untuk g = [2,3,1] berlaku

$$[2,3,1] \circ H = H \circ [2,3,1]$$

$$(5). [3,1,2] \circ H = \{[3,1,2] \circ [1,2,3], [3,1,2] \circ [2,3,1], [3,1,2] \circ [3,1,2]\}$$

$$= \{[3,2,1], [2,1,3], [1,3,2]\}$$

$$H \circ [3,1,2] = \{[1,2,3] \circ [3,1,2], [2,3,1] \circ [3,1,2], [3,1,2] \circ [3,1,2]\}$$

$$= \{[3,2,1], [1,2,3], [2,3,1]\}$$

Untuk g = [3,1,2] berlaku

$$[3,1,2] \circ H = H \circ [3,1,2]$$

$(6). [3,2,1] \circ H = \{[3,2,1] \circ [1,2,3], [3,2,1] \circ [2,3,1], [3,2,1] \circ [3,1,2]\}$

$= \{[3,2,1], [2,1,3], [1,3,2]\}$

$H \circ [3,2,1] = \{[1,2,3] \circ [3,2,1], [2,3,1] \circ [3,2,1], [3,1,2] \circ [3,2,1]\}$

$= \{[3,2,1], [1,3,2], [2,1,3]\}$

Untuk g = [3,2,1] berlaku

$$[3,2,1] \circ H = H \circ [3,2,1]$$

Karena $\forall g \in S_3$ sehingga $g \circ H = H \circ g$, maka $H = \{[1,2,3], [2,3,1], [3,1,2]\}$ subgorup normal dari S_3

Dengan menggunakan Lemma 2.6.2, akan ditunjukkan bahwa $H = \{[1,2,3], [1,3,2]\}$ bukan subgroup normal dari $S_3 = \{[1,2,3], [1,3,2], [2,1,3], [2,3,1], [3,1,2], [3,2,1]\}$, yaitu dengan menunjukkan

$$\text{Ada } g \in S_3 \text{ sehingga } g * H \neq H * g$$

$(1). [1,2,3] \circ H = \{[1,2,3] \circ [1,2,3], [1,2,3] \circ [1,3,2]\}$

$= \{[1,2,3], [1,3,2]\}$

$H \circ [1,2,3] = \{[1,2,3] \circ [1,2,3], [1,3,2] \circ [1,2,3]\}$

$= \{[1,2,3], [1,3,2]\}$

Untuk g = [1,2,3] berlaku

$[1,2,3] \circ H = H \circ [1,2,3] (2). [1,3,2] \circ H = \{[1,3,2] \circ [1,2,3], [1,3,2] \circ [1,3,2]\}$

$= \{[1,3,2], [1,2,3]\}$

$H \circ [1,3,2] = \{[1,2,3] \circ [1,3,2], [1,3,2] \circ [1,3,2]\}$

$= \{[1,3,2], [1,2,3]\}$

Untuk g = [1,3,2] berlaku

$$[1,3,2] \circ H = H \circ [1,3,2]$$

$(3). [2,1,3] \circ H = \{[2,1,3] \circ [1,2,3], [2,1,3] \circ [1,3,2]\}$

$= \{[2,1,3], [2,3,1]\}$

$H \circ [2,1,3] = \{[1,2,3] \circ [2,1,3], [2,1,3] \circ [1,3,2]\}$

$= \{[2,1,3], [3,1,2]\}$

Untuk g = [2,1,3] berlaku

$$[2,1,3] \circ H \neq H \circ [2,1,3]$$

Karena ada g = [2,1,3] ∈ S_3 sehingga $g \circ H \neq H \circ g$, maka $H = \{[1,2,3], [1,3,2]\}$ bukan subgrup normal dari S_3.

3 . Menggunakan Lemma 2.6.3

Dengan menggunakan Lemma 2.6.3, akan ditunjukkan bahwa $H = \{[1,2,3], [2,3,1], [3,1,2]\}$ subgroup normal dari S_3 = {[1,2,3], [1,3,2], [2,1,3], [2,3,1], [3,1,2], [3,2,1]}, yaitu dengan menunjukkan $\forall a , b \in S_3$ berlaku

$$(H * a) * (H * b) = H * (a * b)$$

(1). Untuk a = [1,2,3] dan b = [1,3,2]

$H \circ [1,2,3] = \{[1,2,3] \circ [1,2,3], [2,3,1] \circ [1,2,3], [3,1,2] \circ [1,2,3]\}$
$= \{[1,2,3], [2,3,1], [3,12]\}$

$H \circ [1,3,2] = \{ [1,2,3] \circ [1,3,2], [2,3,1] \circ [1,3,2], [3,1,2] \circ [1,3,2]\}$
$= \{[1,3,2], [2,3,1], [3,1,2]\}$

$(H \circ [1,2,3]) \circ (H \circ [1,3,2]) = \{ [1,2,3], [2,3,1], [3,1,2]\} \circ \{[1,3,2], [2,1,3], [3,2,1]\} =$
$\{[1,2,3] \circ [1,3,2], [1,2,3] \circ [2,1,3], [1,2,3] \circ [3,2,1], [2,3,1] \circ[1,3,2], [2,3,1] \circ[2,1,3],$
$[2,3,1] \circ[3,2,1], [3,1,2] \circ [1,3,2], [3,1,2] \circ [2,1,3], [3,1,2] \circ [3,2,1]\}$
$= \{[1,3,2], [2,1,3], [3,2,1], [2,1,3], [3,2,1], [1,3,2], [3,2,1], [1,3,2], [2,1,3]\}$
$= \{[1,3,2], [2,1,3], [3,2,1]\}$

$H \circ ([1,2,3] \circ [1,3,2]) = H \circ [1,3,2] = \{[1,3,2], [2,1,3], [3,2,1]\}$

Jadi, untuk a = [1,2,3] dan b = [1,3,2] berlaku

$$(H \circ [1,2,3]) \circ (H \circ [1,3,2]) = (H \circ [1,2,3] \circ [1,3,2])$$

(2). Untuk a = [1,2,3] dan b = [2,1,3]

$H \circ [1,2,3] = \{ [1,2,3], [2,3,1], [3,1,2]\}$

$H \circ [2,1,3] = \{ [1,2,3]^o[2,3,1], [2,3,1]^o[2,1,3], [3,1,2]^o [2,1,3]\}$
$= \{ [2,1,3], [3,2,1], [1,3,2]\}$

$(H \circ [1,2,3]) \circ (H \circ [2,1,3]) = \{ [1,2,3], [2,3,1], [3,1,2]\} \circ \{[2,1,3], [3,2,1], [1,3,2]\}$
$= \{[2,1,3], [3,2,1],1,3,2], [3,2,1], [1,3,2], [3,2,1], [1,3,2], [2,1,3], [1,3,2]\}$
$= \{ 1,3,2], [2,1,3], [3,2,1]\}$

$H \circ ([1,2,3] \circ [2,1,3]) = H \circ [2,1,3] = \{ 1,3,2], [2,1,3], [3,2,1]\}$

Jadi, untuk a = [1,2,3] dan b = [2,1,3] berlaku

$$(H \circ [1,2,3]) \circ (H \circ [2,1,3]) = (H \circ [1,2,3] \circ [2,1,3])$$

(3). Untuk a = [1,2,3] dan b = [2,3,1]

$H \circ [1,2,3] = \{ [1,2,3], [2,3,1], [3,1,2]\}$

$$\begin{aligned} H \circ [2,3,1] &= \{ [1,2,3] \circ [2,3,1], [2,3,1] \circ [2,1,3], [3,1,2] \circ [2,1,3]\} \\ &= \{ [2,3,1], [3,1,2], [1,2,3]\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (H \circ [1,2,3]) \circ (H \circ [2,3,1]) &= \{ [1,2,3], [2,3,1], [3,1,2]\} \circ \{[2,3,1], [3,1,2], [1,2,3]\} \\ &= \{ [1,2,3], [2,3,1], [3,1,2]\} \end{aligned}$$

o $(H \circ ([1,2,3] \circ [2,3,1]) = (H \circ [2,3,1]) = \{ [1,2,3], [2,3,1], [3,1,2]\}$

Jadi, untuk a = [1,2,3] dan b = [2,3,1] berlaku

$$H \circ [1,2,3]) \circ (H \circ [2,3,1]) = (H \circ [1,2,3] \circ [2,1,3])$$

(4). Untuk a = [1,2,3] dan b = [3,1,2]

$H \circ [1,2,3] = \{ [1,2,3], [2,3,1], [3,1,2]\}$

$$\begin{aligned} H \circ [3,1,2] &= \{ [1,2,3] \circ [3,1,2], [2,3,1] \circ [3,1,2], [3,1,2] \circ [3,1,2]\} \\ &= \{ [3,1,2], [1,2,3], [2,3,1]\} \end{aligned}$$

$(H \circ [1,2,3]) \circ (H \circ [3,1,2]) = \{ [1,2,3], [2,3,1], [3,1,2]\} \circ \{[2,3,1], [3,1,2]\}$

$= \{[3,1,2], [1,2,3], [2,3,1]\}$

$H \circ ([1,2,3] \circ [3,1,2]) = H \circ [3,1,2] = \{ [3,1,2], [1,2,3], [2,3,1]\}$

Jadi, untuk a = [1,2,3] dan b = [3,1,2]

$$H \circ ([1,2,3] \circ [3,1,2]) = (H \circ [1,2,3]) \circ (H \circ [3,1,2])$$

(5). Untuk a = [1,2,3] dan b = [3,2,1]

$H \circ [1,2,3] = \{ [1,2,3], [2,3,1], [3,1,2]\}$

$$\begin{aligned} H \circ [3,2,1] &= \{ [1,2,3] \circ [3,2,1], [2,3,1] \circ [3,2,1], [3,1,2] \circ [3,2,1]\} \\ &= \{ [3,2,1], [1,3,2], [2,1,3]\} \end{aligned}$$

$(H \circ [1,2,3]) \circ (H \circ [3,2,1]) = \{ [1,2,3], [2,3,1], [3,1,2]\} \circ \{ [3,2,1], [1,3,2], [2,1,3]\}$

$= [3,2,1], [1,3,2], [2,1,3], [1,3,2], [2,1,3], [3,2,1], [2,1,3], [3,2,1], [1,3,2]\}$

$= \{[1,3,2][2,1,3][3,2,1]\}$

$H \circ ([1,2,3] \circ [3,2,1]) = H \circ [3,2,1] = \{[1,3,2][2,1,3][3,2,1]\}$

4). Jadi, untuk a = [1,2,3] dan b = [3,2,1] berlaku

$$(H \circ [1,2,3]) \circ (H \circ [3,2,1]) = H \circ ([1,2,3] \circ [3,2,1])$$

(6). Untuk a = [1,3,2] dan b = [2,1,3]

$H \circ [1,3,2] = \{ [1,2,3] \circ [1,3,2], [2,3,1] \circ [1,3,2], [3,1,2] \circ [1,3,2]\}$
$= \{ [1,3,2], [2,1,3], [3,2,1]\}$

$H \circ [2,1,3] = \{ [1,2,3] \circ [2,1,3], [2,3,1] \circ [2,1,3], [3,1,2] \circ [2,1,3]\}$
$= \{ [2,1,3], [3,2,1], [1,3,2]\}$

$(H \circ [1,3,2]) \circ (H \circ [2,1,3]) = \{ [1,3,2], [2,1,3], [3,2,1]\} \circ \{ [2,1,3], [3,2,1], [1,3,2]\}$
$= \{[3,1,2], [2,3,1], [1,2,3], [1,2,3], [3,1,2], [2,3,1], [2,3,1], [1,2,3], [3,1,2]\}$
$= \{[3,1,2], [2,3,1], [1,2,3]\}$

$H \circ ([1,3,2] \circ [2,1,3]) = H \circ [3,1,2] = \{[3,1,2], [1,2,3], [2,3,1]\}$

Jadi, untuk a = [1,3,2] dan b = [2,1,3] berlaku

$$(H \circ [1,3,2]) \circ (H \circ [2,1,3]) = (H \circ ([1,3,2] \circ [2,1,3])$$

(7). Untuk a = [1,3,2] dan b = [2,3,1]

$H \circ [1,3,2] = \{[1,3,2], [2,1,3], [3,2,1]\}$

$H \circ [2,3,1] = \{[2,3,1], [3,1,2], [1,2,3]\}$

$(H \circ [1,3,2]) \circ (H \circ [2,3,1]) = \{[1,3,2], [2,1,3], [3,2,1] \}^{\circ}\{[2,3,1], [3,1,2], [1,2,3] \}$

$= \{[3,2,1], [2,1,3], [1,3,2], [1,3,2], [2,1,3], [3,2,1],[1,3,2], [2,1,3], [3,2,1]\}$

$= \{[3,2,1], [2,1,3], [1,3,2]\}$

$H \circ ([1,3,2] \circ [2,3,1]) = H \circ [3,2,1] = \{[3,2,1], [2,1,3], [1,3,2]\}$

Jadi untuk a = [1,3,2] dan b = [2,3,1] berlaku

$$H \circ ([1,3,2] \circ [2,3,1]) = H \circ ([1,3,2]) \circ (H \circ [2,3,1])$$

(**8**). $H \circ [1,3,2] = \{[1,3,2], [2,1,3], [3,2,1]\}$

$H \circ [3,1,2] = \{[3,1,2], [1,2,3], [2,3,1]\}$

$(H \circ [1,3,2]) \circ (H \circ [3,1,2])$

$= \{[1,3,2], [2,1,3],3,2,1]\} \circ \{[3,1,2], [1,2,3], [2,3,1]\}$

$= \{[2,1,3], [1,3,2], [3,2,1], [3,2,1], [2,1,3], [1,3,2], [1,3,2], [3,2,1], [2,1,3]\}$

$= \{[2,1,3], [1,3,2], [3,2,1]\}$

$H \circ ([1,3,2] \circ [3,1,2]) = H \circ [2,1,3] = \{[2,1,3], [1,3,2], [3,2,1]\}$

$\therefore (H \circ [1,3,2]) \circ (H \circ [3,1,2]) = H \circ ([1,3,2] \circ [3,1,2])$

$(\mathbf{9}).\, H \circ [1,3,2] = \{[1,3,2], [2,1,3], [2,3,1]\}$

$H \circ [3,2,1] = \{[3,2,1], [1,3,2], [2,1,3]\}$

$(H \circ [1,3,2]) \circ (H \circ [3,2,1])$

$= \{[1,3,2], [2,1,3], [3,2,1]\}^{\circ}\{[3,2,1], [1,3,2], [2,1,3]\}$

$= \{[2,3,1], [1,2,3], [3,1,2], [3,1,2], [2,3,1], [2,3,1], [1,2,3], [3,1,2], [2,3,1]\}$

$= \{[2,3,1], [1,2,3], [3,1,2]\}$

$H \circ ([1,3,2] \circ [3,2,1]) = H \circ [2,3,1] = \{[2,3,1], [3,1,2], [1,2,3]\}$

$\therefore (H \circ [1,3,2]) \circ (H \circ [3,2,1]) = H \circ ([1,3,2] \circ [3,2,1])$

$(\mathbf{10}).\, H \circ [2,1,3] = \{[2,1,3], [3,2,1], [1,3,2]\}$

$H \circ [2,3,1], = \{[2,3,1], [3,1,2], [1,2,3]\}$

$(H \circ [2,1,3]) \circ (H \circ [2,3,1])$

$= \{[2,1,3], [3,2,1], [1,3,2]\} \circ \{[2,3,1], [3,1,2], [1,2,3]\}$

$= \{[1,3,2], [3,2,1], [2,1,3], [2,1,3], [1,3,2], [3,2,1], [3,2,1], [2,,3], [1,32]\}$

$= \{[1,3,2], [2,1,3], [1,3,2]\}$

$H \circ ([2,1,3] \circ [2,3,1]) = H \circ [1,3,2] = \{[1,3,2], [2,1,3], [3,2,1]\}$

$\therefore (H \circ [2,1,3]) \circ (H \circ [2,3,1]) = H \circ ([2,1,3] \circ [2,3,1])$

$(\mathbf{11}).\, H \circ [2,1,3] = \{[2,1,3], [3,2,1], [1,3,2]\}$

$H \circ [3,1,2] = \{[3,1,2], [1,2,3], [2,3,1]\}$

$(H \circ [2,1,3]) \circ (H \circ [3,1,2])$

$= \{[2,1,3], [3,2,1], [1,3,2]\}^{\circ}\{[3,1,2], [1,2,3], [2,3,1]\}$

$= \{[3,2,1], [2,1,3], [1,3,2], [1,3,2], [3,2,1], [2,1,3], [2,1,3], [1,3,2], [3,2,1]\}$

$= \{[3,2,1], [2,1,3], [1,3,2]\}$

$H \circ ([2,1,3] \circ [3,1,2]) = H \circ [3,2,1] = \{[3,2,1], [1,3,2], [2,1,3]\}$

$\therefore (H \circ [2,1,3]) \circ (H \circ [3,1,2]) = H \circ ([2,1,3] \circ [3,1,2])$

$(\mathbf{12}).H\circ[2,1,3]=\{[2,1,3],[3,2,1],[1,3,2]\}$

$H\circ[3,2,1]=\{[3,2,1],[1,3,2],[2,1,3]\}$

$(H\circ[2,1,3])\circ(H\circ[3,2,1])$

$=\{[2,1,3],[3,2,1],[1,3,2]\}^\circ\{[3,2,1],[1,3,2],[2,1,3]\}$

$=\{[3,1,2],[2,3,1],[1,2,3],[1,2,3],[3,1,2],[2,3,1],[1,2,3],[3,1,2]$

$=\{[3,1,2],[2,3,1],[1,2,3]\}$

$H\circ([2,1,3]\circ[3,2,1])=H\circ[3,1,2]=\{[3,1,2],[1,2,3],[2,3,1]\}$

$\therefore(H\circ[2,1,3])\circ(H\circ[3,2,1])=H\circ([2,1,3]\circ[3,2,1])$

$(\mathbf{13}).H\circ[2,3,1]=\{[2,3,1],[3,1,2],[1,2,3]\}$

$H\circ[3,1,2]=\{[3,1,2],[1,2,3],[2,3,1]\}$

$(H\circ[2,3,1])\circ(H\circ[3,1,2])$

$=\{[2,3,1],[3,1,2],[1,2,3]\}^\circ\{[3,1,2],[1,2,3],[2,3,1]\}$

$=\{[1,2,3],[2,3,1],[3,1,2],[2,3,1],[3,1,2],[1,2,3],[3,1,2],[1,2,3],[2,3,1]\}$

$=\{[1,2,3],[2,3,1],[3,1,2]\}$

$H\circ([2,3,1]\circ[3,1,2])=H\circ[1,2,3]=\{[1,2,3],[2,3,1],[3,1,2]\}$
$\therefore(H\circ[2,3,1])\circ(H\circ[3,1,2])=H\circ([2,3,1]\circ[3,1,2])$

$(\mathbf{14}).H\circ[2,3,1]=\{[2,3,1],[3,1,2],[1,2,3]\}$

$H\circ[3,2,1]=\{[3,2,1],[1,3,2],[2,1,3]\}$

$(H\circ[2,3,1])\circ(H\circ[3,2,1])$

$=\{[2,3,1],[3,1,2],[1,2,3]\}^\circ\{[3,2,1],[1,3,2],[2,1,3]\}$

$=\{[1,3,2],[2,1,3],[3,2,1],[2,1,3],[3,2,1],[1,3,2],[3,2,1],[1,3,2],[2,1,3]\}$

$=\{[1,3,2],[2,1,3],[3,2,1]\}$

$H\circ([2,3,1]\circ[3,2,1])=H\circ[1,3,2]=\{[1,3,2],[2,1,3],[3,2,1]\}$

$\therefore(H\circ[2,3,1])\circ(H\circ[3,2,1])=H\circ([2,3,1]\circ[3,2,1])$

$(\mathbf{15}). H \circ [3,1,2] = \{[3,1,2],[1,2,3],[2,3,1]\}$

$H \circ [3,2,1] = \{[3,2,1], [1,3,2], [2,1,3]\}$

$(H \circ [3,1,2]) \circ (H \circ [3,2,1])$

$= \{[3,1,2],[1,2,3],[2,3,1]\}^{\circ}\{[3,2,1],[1,3,2],[2,1,3]\}$

$= \{[2,1,3],[3,2,1],[1,3,2][\ 3,2,1][1,3,2][2,1,3],\ [1,3,2][2,1,3][3,2,1]\}$

$= \{[2,1,3][3,2,1][1,3,2]\}$

$H \circ [3,1,2]) \circ [3,2,1]) = (\ H \circ [2,1,3]) = \{[2,1,3][3,2,1][1,3,2]\}$

$\therefore (H \circ [3,1,2]) \circ (\ H \circ [2,3,1]) = (H \circ [3,1,2] \circ [3,2,1])$

Dengan cara yang serupa dapat ditunjukkan bahwa $\forall a, b \in S3 \ \ berlaku\ (H \circ a) \circ (\ H \circ b) = H \circ (a \circ b)$ (kalau dicoba sewmuanya akan ada 36 kasus, yang sudah dicoba baru sampai 15 kasus).

Dengan demikian, $H = \{[1,2,3],[2,3,1],[3,1,2]\}$ suatu subgroup normal.

1. Akan ditunjukkan $H = \{[1,2,3],[1,3,2]\}$ bukan subgroup normal dari $S_3 = \{[1,2,3],[1,3,2],[2,1,3],[2,3,1],[3,1,2],[3,2,1]\}$ dengan menggunakan Lemma **2.6.3**

$(\mathbf{1}).\ H \circ [1,2,3] = \{[1,2,3] \circ [1,2,3], [1,3,2] \circ [1,2,3]\} = \{[1,2,3], [1,3,2]\}$

$H \circ [1,3,2] = \{[1,2,3] \circ [1,3,2], [1,3,2] \circ [1,3,2]\} = \{[1,3,2], [1,2,3]\}$

$(H \circ [1,2,3]) \circ (H \circ [1,3,2]) = \{[1,2,3], [1,3,2]\} \circ \{[1,3,2], [1,2,3]\}$

$= \{[1,3,2],[1,2,3],[1,2,3],[1,3,2]\}$

$= \{[1,2,3],[1,3,2]\}$

$H \circ ([1,2,3] \circ [1,3,2]) = H \circ [1,3,2] = \{[1,3,2], [1,2,3]\}$

$\therefore (H \circ [1,2,3]) \circ (H \circ [1,3,2]) = H \circ ([1,2,3] \circ [1,3,2])$

$(\mathbf{2}). H \circ [1,2,3] = \{[1,2,3] \circ [1,2,3], [1,3,2] \circ [1,2,3]\} = \{[1,2,3], [1,3,2]\}$

$H \circ [2,1,3] = \{[1,2,3] \circ [2,1,3], [1,3,2] \circ [2,1,3]\} = \{[2,1,3], [3,1,2]\}$

$(H \circ [1,2,3]) \circ (H \circ [2,1,3]) = \{[1,2,3], [1,3,2]\} \circ \{[2,1,3], [3,1,2]\}$

$= \{[2,1,3], [3,1,2], [3,1,2], [2,1,3]\}$

$= \{[2,1,3], [3,1,2]\}$

$H \circ ([1,2,3] \circ [2,1,3]) = H \circ [2,1,3] = \{[2,1,3], [3,1,2]\}$

$\therefore (H \circ [1,2,3]) \circ (H \circ [2,1,3]) = H \circ ([1,2,3] \circ [2,1,3])$

(**3**). $H \circ [1,2,3] = \{[1,2,3] \circ [1,2,3], [1,3,2] \circ [1,2,3]\} = \{[1,2,3], [1,3,2]\}$

$H \circ [2,3,1] = \{[1,2,3] \circ [2,3,1], [1,3,2] \circ [2,3,1]\} = \{[2,3,1], [3,2,1]\}$

$(H \circ [1,2,3]) \circ (H \circ [2,3,1]) = \{[1,2,3], [1,3,2]\} \circ {}^\circ\{[2,3,1], [3,2,1]\}$

$= \{[2,3,1], [3,2,1], [3,2,1], [2,3,1]\}$

$= \{[2,3,1], [3,2,1]\}$

$H \circ ([1,2,3] \circ [2,3,1]) = H \circ [2,3,1] = \{[2,3,1], [3,2,1]\}$

$\therefore (H \circ [1,2,3]) \circ (H \circ [2,3,1]) = H \circ ([1,2,3] \circ [2,3,1])$

(**4**). $H \circ [1,2,3] = \{[1,2,3] \circ [1,2,3], [1,3,2] \circ [1,2,3]\} = \{[1,2,3], [1,3,2]\}$

$H \circ [3,1,2] = \{[1,2,3] \circ [3,1,2], [1,3,2] \circ [3,1,2]\} = \{[3,1,2], [2,1,3]\}$

$(H \circ [1,2,3]) \circ (H \circ [3,1,2]) = \{[1,2,3], [1,3,2]\} \circ \{[3,1,2], [2,1,3]\}$

$= \{[3,1,2], [2,1,3], [2,1,3], [3,1,2]\}$

$= \{[2,1,3], [3,1,2]\}$

$H \circ ([1,2,3] \circ [3,1,2]) = H \circ [3,1,2] = \{[3,1,2], [2,1,3]\}$

$\therefore (H \circ [1,2,3]) \circ (H \circ [3,1,2]) = H \circ ([1,2,3] \circ [3,1,2])$

(**5**). $H \circ [1,2,3] = \{[1,2,3] \circ [1,2,3], [1,3,2] \circ [1,2,3]\} = \{[1,2,3], [1,3,2]\}$

$H \circ [3,2,1] = \{[1,2,3] \circ [3,2,1], [1,3,2] \circ [3,2,1]\} = \{[3,2,1], [2,3,1]\}$

$(H \circ [1,2,3]) \circ (H \circ [3,2,1]) = \{[1,2,3], [1,3,2]\} \circ \{[3,2,1], [2,3,1]\}$

$= \{[3,2,1], [2,3,1], [2,3,1], [3,2,1]\}$

$= \{[2,3,1], [3,2,1]\}$

$H \circ ([1,2,3] \circ [3,2,1]) = H \circ [3,2,1] = \{[3,2,1], [2,3,1]\}$

$\therefore (H \circ [1,2,3]) \circ (H \circ [3,2,1]) = H \circ ([1,2,3] \circ [3,2,1])$

(**6**). $H \circ [1,3,2] = \{[1,2,3] \circ [1,3,2], [1,3,2] \circ [1,3,2]\} = \{[1,3,2], [1,2,3]\}$

$H \circ [2,1,3] = \{[1,2,3] \circ [2,1,3], [1,3,2] \circ [2,1,3]\} = \{[2,1,3], [3,1,2]\}$

$(H \circ [1,3,2]) \circ (H \circ [2,1,3]) = \{[1,3,2], [1,2,3]\} \circ {}^{\circ}\{[2,1,3], [3,1,2]\}$

$= \{[3,1,2], [2,1,3], [2,1,3], [3,1,2]\}$

$= \{[2,1,3], [3,1,2]\}$

$H \circ ([1,3,2] \circ [2,1,3]) = H \circ [3,1,2] = \{[3,1,2], [2,1,3]\}$

$\therefore (H \circ [1,3,2]) \circ (H \circ [2,1,3]) = H \circ ([1,3,2] \circ [2,1,3])$

(**8**). $H \circ [1,3,2] = \{[1,2,3] \circ [1,3,2], [1,3,2] \circ [1,3,2]\} = \{[1,3,2], [1,2,3]\}$

$H \circ [2,3,1] = \{[1,2,3] \circ [2,3,1], [1,3,2] \circ [2,3,1]\} = \{[2,3,1], [3,2,1]\}$

$(H \circ [1,3,2]) \circ (H \circ [2,3,1]) = \{[1,3,2], [1,2,3]\} \circ \{[2,3,1], [3,2,1]\}$

$= \{[3,2,1], [2,3,1], [2,3,1], [3,2,1]\}$

$= \{[2,3,1], [3,2,1]\}$

$H \circ ([1,3,2] \circ [2,3,1]) = H \circ [3,2,1] = \{[3,2,1], [2,3,1]\}$

$\therefore (H \circ [1,3,2]) \circ (H \circ [2,3,1]) = H \circ ([1,3,2] \circ [2,3,1])$

(**9**). $H \circ [1,3,2] = \{[1,2,3] \circ [1,3,2], [1,3,2] \circ [1,3,2]\} = \{[1,3,2], [1,2,3]\}$

$H \circ [3,1,2] = \{[1,2,3] \circ [3,1,2], [1,3,2] \circ [3,1,2]\} = \{[3,1,2], [2,1,3]\}$

$(H \circ [1,3,2]) \circ (H \circ [3,1,2]) = \{[1,3,2], [1,2,3]\} \circ \{[3,1,2], [2,1,3]\}$

$= \{[2,1,3], [3,1,2], [3,1,2], [2,1,3]\}$

$= \{[2,1,3], [3,1,2]\}$

$H \circ ([1,3,2] \circ [3,1,2]) = H \circ [2,1,3] = \{[2,1,3], [3,1,2]\}$

$\therefore (H \circ [1,3,2]) \circ (H \circ [3,1,2]) = H \circ ([1,3,2] \circ [3,1,2])$

(**10**). $H \circ [1,3,2] = \{[1,2,3] \circ [1,3,2], [1,3,2] \circ [1,3,2]\} = \{[1,3,2], [1,2,3]\}$

$H \circ [3,2,1] = \{[1,2,3] \circ [3,2,1], [1,3,2] \circ [3,2,1]\} = \{[3,2,1], [2,3,1]\}$

$(H \circ [1,3,2]) \circ (H^\circ[3,2,1]) = \{[1,3,2],[1,2,3]\} \circ \{[3,2,1],[2,3,1]\}$

$= \{[2,3,1],[3,2,1],[3,2,1],[2,3,1]\}$

$= \{[2,3,1],[3,2,1]\}$

$H \circ ([1,3,2] \circ [3,2,1]) = H \circ [2,3,1] = \{[2,3,1],[3,2,1]\}$

$\therefore (H \circ [1,3,2]) \circ (H \circ [3,2,1]) = H \circ ([1,3,2] \circ [3,2,1])$

$(\mathbf{11})$. $H \circ [2,1,3] = \{[1,2,3] \circ [2,1,3],[1,3,2] \circ [2,1,3]\} = \{[2,1,3],[3,1,2]\}$

$H \circ [2,3,1] = \{[1,2,3] \circ [2,3,1],[1,3,2] \circ [2,3,1]\} = \{[2,3,1],[3,2,1]\}$

$(H \circ [2,1,3]) \circ (H \circ [2,3,1]) = \{[2,1,3],[3,1,2]\} \circ \{[2,3,1],[3,2,1]\}$

$= \{[1,3,2],[3,1,2],[1,2,3],[2,1,3]\}$

$H \circ ([2,1,3] \circ [2,3,1]) = H \circ [1,3,2] = \{[1,3,2],[1,2,3]\}$

$\therefore (H \circ [2,1,3]) \circ (H \circ [2,3,1]) \neq H \circ ([2,1,3] \circ [2,3,1])$

Karena ada $[2,1,3],[2,3,1] \in S_3$ sehingga $(H \circ a) \circ (H \circ b) \neq H \circ (a \circ b)$, maka $H = \{[1,2,3],[1,3,2]\}$ bukan subgroup normal dari S_3

Teorema 2.6.1

Misalkan $(G,*)$ suatu group dengan unsur identitas e dan N suatu subgroup normal dari G.

Tulis $G/N = \{N * a | a \in G\}$, setiap $N * a, N * b \in G/N$ didefinisikan operasi $\circledast$ di G/N sebagai $(N * a) \circledast (N * b) = N * (a * b)$, maka

$(G/N, \circledast)$ suatu group.

Bukti :

Misalkan $(G,*)$ suatu group dengan unsur identitas e dan N suatu subgroup normal dari G.

Tulis $G/N = \{N * a | a \in G\}$, setiap $N * a, N * b \in G/N$ didefinisikan operasi $\circledast$ di G/N sebagai berikut : $(N * a) \circledast (N * b) = N * (a * b)$.

Akan ditunjukkan $(G/N, \circledast)$ suatu group.

(1). Ambil , $y \in G/N$, akan ditunjukkan $x \circledast y \in G/N$.

Karena $x, y \in G/N$dan $G/N = \{N * a | a \in G\}$ maka

$x = N * a_1$, $y = N * a_2$ untuk suatu $a_1, a_2 \in G$

Perhatikan bahwa :

Dengan menggunakan sifat tertutup dari subgrup maka :

$$x \circledast y = (N * a_1) \circledast (N * a_2\ ) = N * (a_1 * a_2)$$

Karena $a_1, a_2 \in G$ dan $(G,*)$ suatu group maka $a_1 * a_2 \in G$.

Tulis $a_1 * a_2 = a_3$ untuk suatu $a_3 \in G$.

Akibatnya $x \circledast y = N * (a_1 * a_2) = N * a_3 \in G/N$.

(2). Ambil $x, y, z \in G/N$, akan ditunjukkan $(x \circledast y) \circledast z = x \circledast (y * z)$

Karena $x, y, z \in G/N$ dan $G/N = \{N * a | a \in G\}$ maka

$x = N * a$, $y = N * b, z = N * c$ untuk suatu $a, b, c \in G$

Perhatikan bahwa :

Dengan menggunakan sifat asosiatif, maka

$$\begin{aligned}(x \circledast y) \circledast z &= ((N * a) \circledast (N * b)) \circledast (N * c) \\ &= (N * (a * b)) \circledast (N * c) \\ &= N * (a * b) * c\end{aligned}$$

$$= N * a * (b * c)$$
$$= (N * a) \circledast (N * (b * c))$$
$$= x \circledast ((N * b) \circledast (N * c))$$
$$= x \circledast (y \circledast z)$$

(3). Akan ditunjukkan $N * e$ adalah unsur identitas di G/N terhadap operasi biner $\circledast$.

Ambil $x \in G/N$, akan ditunjukkan $x \circledast N * e = N * e \circledast x = x$.

Karena $x \in G/N$dan $G/N = \{N * a | a \in G\}$ maka

$x = N * a$ untuk suatu $a \in G$.

Perhatikan bahwa :

Dengan menggunakan unsur identitas, maka

$$x \circledast N * e \quad = (N * a) \circledast (N * e) = N * (a * e)$$

Berdasarkan definisi 1 bahwa setiap a ∈ G berlaku a ∗ e = a

$$= N * a$$
$$= x$$

$$(N * e) \circledast x = (N * e) \circledast (N * a) = N * (e * a)$$
$$= N * a$$
$$= x$$

(4). Ambil $x \in G/N$, akan ditunjukkan $x^{-1} \in G/N$.

Karena $x \in G/N$dan $G/N = \{N * a | a \in G\}$ maka

$x = N * a$ untuk suatu $a \in G$.

Pilih $x^{-1} = N * a^{-1}$.

Karena $a \in G$ dan $(G,*)$ suatu group maka $a^{-1} \in G$.
Dengan menggunakan unsur invers, maka
Akibatnya,

$$x^{-1} = N * a^{-1} \in G/N$$

Karena 1, 2, 3, 4, dan 5 maka $(G/N, \circledast)$ suatu group

Contoh 1

$(S_3,\circ)$ suatu group. $N = \{[1,2,3], [2,3,1], [3,1,2]\}$ subgroup normal dari S_3.

$S_3/N = \{N \circ [1,2,3], N \circ [2,1,3]\}$. $(S_3/N, \odot)$ suatu group

$\odot$	$N \circ [1,2,3]$	$N \circ [2,1,3]$

$N \circ [1,2,3]$	$N \circ [1,2,3]$	$N \circ [2,1,3]$
$N \circ [2,1,3]$	$N \circ [2,1,3]$	$N \circ [1,2,3]$

Note:
Unsur yang dikalikan dengan unsur itu sendiri maka hasilnya unsur itu sendiri sedangkan unsur yang dikalikan dengan unsur lain maka menghasilkan unsur yang lain pula.

Contoh 2

$(\mathbb{Z}, +)$ suatu group. $6\mathbb{Z}$ subgroup normal dari $\mathbb{Z}$.

$\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} = \{6\mathbb{Z}+0, 6\mathbb{Z}+1, 6\mathbb{Z}+2, 6\mathbb{Z}+3, 6\mathbb{Z}+4, 6\mathbb{Z}+5\}$.

$(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, \oplus)$ suatu group

$\oplus$	$6\mathbb{Z}+0$	$6\mathbb{Z}+1$	$6\mathbb{Z}+2$	$6\mathbb{Z}+3$	$6\mathbb{Z}+4$	$6\mathbb{Z}+5$
$6\mathbb{Z}+0$	$6\mathbb{Z}+0$	$6\mathbb{Z}+1$	$6\mathbb{Z}+2$	$6\mathbb{Z}+3$	$6\mathbb{Z}+4$	$6\mathbb{Z}+5$
$6\mathbb{Z}+1$	$6\mathbb{Z}+1$	$6\mathbb{Z}+2$	$6\mathbb{Z}+3$	$6\mathbb{Z}+4$	$6\mathbb{Z}+5$	$6\mathbb{Z}+0$
$6\mathbb{Z}+2$	$6\mathbb{Z}+2$	$6\mathbb{Z}+3$	$6\mathbb{Z}+4$	$6\mathbb{Z}+5$	$6\mathbb{Z}+0$	$6\mathbb{Z}+1$
$6\mathbb{Z}+3,$	$6\mathbb{Z}+3$	$6\mathbb{Z}+4$	$6\mathbb{Z}+5$	$6\mathbb{Z}+0$	$6\mathbb{Z}+1$	$6\mathbb{Z}+2$
$6\mathbb{Z}+4$	$6\mathbb{Z}+4$	$6\mathbb{Z}+5$	$6\mathbb{Z}+0$	$6\mathbb{Z}+1$	$6\mathbb{Z}+2$	$6\mathbb{Z}+3$
$6\mathbb{Z}+5$	$6\mathbb{Z}+5$	$6\mathbb{Z}+0$	$6\mathbb{Z}+1$	$6\mathbb{Z}+2$	$6\mathbb{Z}+3$	$6\mathbb{Z}+4$

Definisi 15

Misalkan (□,□) suatu group dan □ subgroup normal dari □.

Group (□/□,□) disebut **group faktor / group quotient**.

Contoh 3

$(S_3/N, \odot)$ suatu group faktor.

1. Closure: Untuk membuktikan bahwa operasi $\odot$ pada $(S_3/N, \odot)$ tertutup, perlu diperhatikan bahwa setiap elemen dalam $(S_3/N, \odot)$ adalah kelas ekuivalen modulo N. Operasi $\odot$ pada $(S_3/N, \odot)$ didefinisikan sebagai operasi komposisi dalam grup asli S3. Dengan kata lain, untuk dua elemen kelas ekuivalen aN dan bN dalam$(S_3/N, \odot)$, hasil komposisi aN $\odot$ bN adalah elemen kelas ekuivalen dari a $\odot$ b dalam S3.
   Karena S3 adalah grup, maka a $\odot$ b juga merupakan elemen S3. Oleh karena itu, closure terpenuhi dalam $(S_3/N, \odot)$

2. Asosiatif: Kita tahu bahwa operasi komposisi dalam S3, yaitu •, adalah operasi asosiatif. Oleh karena itu, sifat asosiatif juga terbawa dalam $(S_3/N, \odot)$
3. Identitas: Identitas dalam $(S_3/N, \odot)$ adalah kelas ekuivalen dari elemen identitas (e) dalam S3, yaitu eN. Untuk setiap elemen aN dalam $(S_3/N, \odot)$ kita dapat lihat bahwa eN $\odot$ aN = aN $\odot$ eN = aN. Jadi, identitas terpenuhi.
4. Invers: Setiap elemen aN dalam $(S_3/N, \odot)$ memiliki invers yang diberikan oleh a^(-1)N, di mana a^(-1) adalah invers dari a dalam S3. Dalam grup S3, setiap elemen memiliki invers, sehingga setiap elemen aN dalam $(S_3/N, \odot)$ juga memiliki invers, memenuhi sifat invers.
5. Dengan demikian, $(S_3/N, \odot)$ memenuhi semua sifat grup dan merupakan grup faktor dari S3 terhadap subgroup normal N.

$(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, \oplus)$ suatu group faktor.

Contoh 4

$\mathbb{Z}$ merupakan group komutatif terhadap operasi jumlah. Setiap $m \in \mathbb{Z}$, $m\mathbb{Z} = \{mk | k \in \mathbb{Z}\}$ merupakan subgroup normal dari $\mathbb{Z}$, sehingga $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$=$\{\mathbb{Z}, \mathbb{Z}+1, \mathbb{Z}+2, \dots, \mathbb{Z}+(m-1)\}$ merupakan group faktor.

Definisi 16

Misalkan $(G_1, *_1)$ dan $(G_2, *_2)$suatu group dan φ suatu fungsi dari G_1ke G_2. φ disebut **homomorfisma** jika setiap $a, b \in G_1$ berlaku:

$$\varphi(a *_1 b) = \varphi(a) *_2 \varphi(b)$$

Contoh 5

$(\mathbb{Z}, +)$ suatu group dan $(G, \cdot)$ dengan$G = \{2^n | n \in \mathbb{Z}\}$=$\left\{\dots, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, 3, \dots\right\}$ suatu

group terhadap $\cdot$

Buat pemetaan $\varphi: (\mathbb{Z}, +) \to (G, \cdot)$

$$n \to 2^n$$

Periksa apakah φ suatu homomorfisma

Jawab :

Ambil $n, m \in \mathbb{Z}$.

Perhatikan bahwa

$$\varphi(n+m) = 2^{n+m} = 2^n \cdot 2^m = \varphi(n) \cdot \varphi(m)$$

$\therefore$ φ suatu homomorfisma

Contoh 6

$(R - \{0\},\cdot)$ suatu group dan $G = \{1, -1\}$. $(G, \cdot)$ suatu group.

Buat fungsi φ: $(R - \{0\}, \ \cdot) \rightarrow (G, \ \cdot)$

$x \rightarrow 1$ jika $x > 0$

$x \rightarrow -1$ jika $x < 0$

Periksa apakah φ suatu homomorfisma

Jawab:

Ambil $x, y \in R - \{0\}$

Kasus 1 : $x > 0, y > 0$

Karena $x > 0$ dan $y > 0$ maka $x \cdot y > 0$

Perhatikan bahwa :

$$\varphi(x \cdot y) = 1 = 1 \cdot 1 = \varphi(x) \cdot \varphi(y)$$

Kasus 2 : $x < 0, y > 0$

Karena $x < 0$ dan $y > 0$ maka $x \cdot y < 0$

Perhatikan bahwa :

$$\varphi(x \cdot y) = -1 = -1 \cdot 1 = \varphi(x) \cdot \varphi(y)$$

Kasus 3 : $x > 0, y < 0$

Karena $x > 0$ dan $y < 0$ maka $x \cdot y < 0$

Perhatikan bahwa :

$$\varphi(x \cdot y) = -1 = 1 \cdot -1 = \varphi(x) \cdot \varphi(y)$$

Kasus 4 : $x < 0, y < 0$

Karena $x < 0$ dan $y < 0$ maka $x \cdot y > 0$

Perhatikan bahwa :

$$\varphi(x \cdot y) = 1 = -1 \cdot -1 = \varphi(x) \cdot \varphi(y)$$

Dari kasus 1, 2, 3, dan 4 diperoleh setiap $x, y \in R - \{0\}$ berlaku

$$\varphi(x \cdot y) = \varphi(x) \cdot \varphi(y)$$

$\therefore \varphi$ homomorfisma

Contoh 7

$G = \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc \neq 0\}$.membentuk group terhadap operasi perkalian matriks dan $(\mathbb{R} - \{0\}, \cdot)$ suatu group.

Buat fungsi

$$\varphi: \quad G \to \mathbb{R} - \{0\}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \to ad - bc$$

Periksa apakah φ suatu homomorfisma

Jawab :

Ambil $x, y \in G$.

Karena $x, y \in G$ dan $G = \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc \neq 0\}$ maka

$x = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$ untuk suatu $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2, d_1, d_2 \in \mathbb{R}$,

dan $a_1 - d_1 \neq 0, a_2 - d_2 \neq 0$.

Perhatikan bahwa

$$\varphi(x \cdot y) = \varphi\left[\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}\right]$$

$$= \varphi\left[\begin{pmatrix} a_1a_2 + b_1c_2 & a_1b_2 + b_1d_2 \\ c_1a_2 + d_1c_2 & c_1a_2 + d_1c_2 \end{pmatrix}\right]$$

$$=(a_1a_2 + b_1c_2)(c_1b_2 + d_1d_2) - (c_1a_2 + d_1c_1)(a_1b_2 + b_1d_2)$$

$$=a_1a_2c_1b_2 + a_1a_2d_1d_2 + b_1c_2c_1b_2 + b_1c_2d_1d_2 - c_1a_2a_1b_2 - c_1a_2b_1d_2 - d_1c_1a_1b_2 - d_1c_1b_1d_2$$

$$=a_1a_2d_1d_2 + b_1c_2c_1b_2 - c_1a_2b_1d_2 - d_1c_1a_1b_2$$

$$\varphi(x) = \varphi\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} = a_1d_1 - b_1c_1$$

$$\varphi(y) = \varphi\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} = a_2d_2 - b_2c_2$$

$$\varphi(x) \cdot \varphi(y) = (a_1d_1 - b_1c_1)(a_2d_2 - b_2c_2)$$

$$=a_1a_2d_1d_2 + b_1c_2c_1b_2 - c_1a_2b_1d_2 - d_1c_1a_1b_2$$

Karena, $\varphi(x \cdot y) = \varphi(x) \cdot \varphi(y)$, maka φ suatu homomorfisma.

Contoh 8

Misal G suatu group dan $g \in G$.

Definisikan $\varphi: G \to G$

$x \to gxg^{-1}$

Apakah φ suatu homomorfisma?

Jawab :

Ambil $x, y \in G$. Maka $\varphi(x) \cdot \varphi(y) = (gxg^{-1}) \cdot (gyg^{-1}) = gx(g^{-1}g)\, yg^{-1}$

$= g(x\, y)g^{-1}$

$= \varphi(x \cdot y)$

$\therefore \varphi$ homomorfisma.

Contoh 9

Misalkan G suatu group, definisikan pemetaan

$$g : G \rightarrow G$$

$$a \mapsto e$$

Ambil $a, b \in G$. Perhatikan bahwa $g(a) = e, g(b) = e, g(ab) = e$

$$g(ab) = e = ee = g(a)g(b).$$

Ini berarti, g suatu homomorfirsma.

Lemma 2.7.1

Misalkan $(G,*)$ suatu group, N subgroup normal dari G, $(G/N,\circledast)$ suatu group faktor.

Definisikan pemetaan dari G ke G/Nsebagai berikut:

$$\varphi: G \rightarrow G/N$$

$$x \rightarrow N * x$$

Maka φ suatu homomorfisma pada dari G ke G/N

Bukti:

Misalkan $(G,*)$ suatu group, N subgroup normal dari G, $(G/N,\circledast)$ suatu groupfaktor.

Definisikan pemetaan dari G ke G/Nsebagai berikut:

$$\varphi: G \rightarrow G/N$$

$$x \rightarrow N * x$$

Akan ditunjukkan φ suatu homomorfisma pada

dari G ke G/N.(1). Ambil $a,b \in G$

Perhatikan bahwa

$\varphi(a * b)$=$N *(a * b)$ =$(N * a)\circledast(N * b)$ =

$\varphi(a)\circledast \varphi(b)$

(Berdasarkan teorema 2.6.1)

(2). Ambil $y \in G/N$. Akan ditunjukkan

terdapat $x \in G$ sehingga $y = \varphi(x)$

Karena $y \in G/N$ dan $G/N = \{N * a \mid a \in G\}$ maka

$y = N * a_1$ untuk suatu $a_1 \in G$

Pilih $x = a_1$ maka $\varphi(x) = \varphi(a_1) = N * a_1 = y$

$\therefore$ φ pada.

Contoh 10

Misalkan $(G,*)$ suatu group, $g \in G$ dan φ suatu pemetaan dari G ke G dengan

$\varphi(x) = g * x * g^{-1}, \forall x \in G$. Akan ditunjukkan φ homomorfisma dan satu-satu

Jawab:

(1). Akan ditunjukkan φ homomorfisma

Ambil $a, b \in G$, akan ditunjukkan $\varphi(a * b) =$

$\varphi(a) * \varphi(b)$Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}
\varphi(a * b) &= g * (a * b) * g^{-1} \\
&= g * (a * e * b) * g^{-1} \\
&= g * (a * g^{-1} * g * b) * g^{-1} \\
&= (g * a * g^{-1}) * (g * b * g^{-1}) \\
&= \varphi(a) * \varphi(b)
\end{aligned}$$

$\therefore$ φ homomorfisma

Note: sesuai lemma 2.6.1 karena a,b $\in G$ maka dapat dikalikan dengan g dan $g^{-1,}$

Karena g dan g^{-1} adalah unsur identitas.

(2). Ambil $a, b \in G$ dengan $\varphi(a) = \varphi(b)$, akan ditunjukkan $a = b$.

Perhatikan bahwa

$$\varphi(a) = \varphi(b)$$

$g * a * g^{-1} = g * b * g^{-1} \cdots (*)$ (sesuai dengan pembuktian diatas)

Karena G suatu group maka berlaku hukum pembatalan kiri dan kanansehingga dari $(*)$ diperoleh

$a = b$.

Karena (1) dan (2) maka φ homomorfisma dan satu-satu.

Definisi 17

Misalkan $(G_1, *_1)$,$(G_2, *_2)$ suatu group dengan unsur identitas masing-masing e_1 dan e_2 dan φ suatu pemetaan homomorfisma dari G_1 ke G_2.

Himpunan $\{x \in G_1 | \varphi(x) = e_2\}$ disebut **kernel** dari φ dan ditulis sebagai K_φ.

Contoh 11

$(\mathbb{Z},+)$ suatu group dan $G=\{2^n | n \in \mathbb{Z}\}$, $(G,\cdot)$ suatu group

$\varphi:(\mathbb{Z},+) \rightarrow (G,\cdot)$

$n \rightarrow 2^n$

Suatu pemetaan homomorfisma

$K_\varphi = \{0\}$.

Contoh 12

$(R\text{-}\{0\},\cdot)$ suatu group dan $G=\{1,-1\}$. $(G,\cdot)$ suatu group

$\varphi: R\text{-}\{0\} \rightarrow G$

$x \rightarrow 1$ jika $x > 0$

$x \rightarrow -1$ jika $x < 0$

Suatu pemetaan homomorfisma

$K_\varphi = \{x \in R\text{-}\{0\} | x > 0\}$.

Contoh 13

Misalkan G suatu group. Kernel dari pemetaan homomorfisma

$$f : G \rightarrow G$$
$$a \mapsto e$$

Adalah $K_f = (x \in G | f(x) = e\} = G$.

Lemma 2.7.2

Misalkan $(G_1, *_1),(G_2, *_2)$ suatu group dengan unsur identitas masing-masing e_1 dan e_2 dan φ suatu pemetaan homomorfisma dari G_1 ke G_2,maka:

1. $\varphi(e_1)= e_2$
2. Setiap $x \in G_1$ berlaku $\varphi(x^{-1})=[\varphi(x)]^{-1}$

Bukti:

Misalkan $(G_1, *_1),(G_2, *_2)$ suatu group dengan unsur identitas masing-masing e_1 dan

e_2 dan φ suatu pemetaan homomorfisma dari G_1 ke G_2, akan ditunjukkan:

1. $\varphi(e_1)= e_2$
2. Setiap $x \in G_1$ berlaku $\varphi(x^{-1})=[\varphi(x)]^{-1}$

(1). Perhatikan bahwa

$$\varphi(e_1) = \varphi(e_1 *_1 e_1)$$

$$\varphi(e_1) = \varphi(e_1) *_2 \varphi(e_1)$$

$$[\varphi(e_1)]^{-1} *_2 \varphi(e_1) = [\varphi(e_1)]^{-1} *_2(\varphi(e_1) *_2 \varphi(e_1))$$

$$e_2 = \varphi(e_1)$$

(2). Ambil $x \in G$

Perhatikan bahwa

$$\varphi(e_1) = \varphi(x *_1 x^{-1})$$

$$e_2 = \varphi(x) *_2 \varphi(x^{-1})$$

$$[\varphi(x)]^{-1} *_2 e_2 = [\varphi(x)]^{-1} *_2(\varphi(x) *_2 \varphi(x^{-1}))[\varphi(x)]^{-1}$$

$$= \varphi(x^{-1})$$

Lemma 2.7.3

Misalkan $(G_1, *_1),(G_2, *_2)$ suatu group dengan unsur identitas masing-masing e_1 dan e_2 dan φ suatu pemetaan homomorfisma dari G_1 ke G_2, maka K_φ subgroup normal dari G_1.

Bukti:

Misalkan $(G_1, *_1),(G_2, *_2)$ suatu group dengan unsur identitas masing-masing e_1 dan

e_2 dan φ suatu pemetaan homomorfisma dari G_1 ke G_2, akan ditunjukkan K_φ

subgroup normal dari G_1.

(1). Karena $K_\varphi=\{x \in G1 | \varphi(x)= e2\}$ maka

$\therefore K_\varphi \subseteq G$

(2). Karena $\varphi(e1)= e2$, maka $e1 \in K_\varphi$

$\therefore K_\varphi \neq \emptyset$

(3). Ambil $a, b \in K_\varphi$. Akan ditunjukkan $a *_1 b \in K_\varphi$ yaitu dengan menunjukkan

$a *_1 b \in G_1$ dan $\varphi(a *_1 b)= e_2$.

Karena $a,b \in k$ dan $K_\varphi=\{x \in G_1 | \varphi(x)= e_2\}$, maka :

i. $a \in G_1$ dan $\varphi(a)= e_2$
ii. $b \in G_1$ dan $\varphi(b)= e_2$

Karena $a, b \in G_1$ dan G_1 suatu group maka $a *_1 b \in G_1$

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}\varphi(a *_1 b) &= \varphi(a) *_2 \varphi(b)\\ &= e_2 *_2 e_2\\ &= e_2\end{aligned}$$

$\therefore a *_1 b \in K_\varphi$

(4). Ambil $a \in K_\varphi$. Akan ditunjukkan $a^{-1} \in k_\varphi$ yaitu dengan menunjukkan $a^{-1} \in G_1$

dan $\varphi(a^{-1})= e_2$.

Karena $a \in K_\varphi$ dan $K_\varphi=\{x \in G_1 | \varphi(x)= e_2\}$ maka $a \in G_1$ dan $\varphi(a)= e_2$.

Karena $a \in G_1$ dan G_1 suatu group

maka $a^{-1} \in G_1$.Perhatikan bahwa

$$\varphi(a^{-1})=[\varphi(a)]^{-1}$$
$$= e_2^{-1}$$
$$= e_2$$

$\therefore a^{-1} \in K_\varphi$

(5). Ambil $g \in G_1$ dan k$\in K_\varphi$. Akan ditunjukkan $g *_1 k *_1 g^{-1} \in K$ yaitu denganmenunjukkan $g *_1 k *_1 g^{-1} \in G_1$ dan $\varphi(g *_1 k *_1 g^{-1})= e_2$.

Karena $g \in G_1$ dan G_1 suatu group maka $g^{-1} \in G_1$.

Karena $k \in K_\varphi$ dan $k_\varphi \subseteq G_1$ maka $k \in G_1$.

Karena $g, k, g^{-1} \in G_1$ dan G_1 suatu group maka $g *_1 k *_1 g^{-1} \in G_1$.Karena $k \in K_\varphi$ maka $\varphi(k)=e_2$.

Perhatikan bahwa

$$\varphi(g *_1 k *_1 g^{-1}) = \varphi(g) *_2 \varphi(k) *_2 \varphi(g^{-1}) = \varphi(g) *_2 e_2 *_2 \varphi(g^{-1})$$
$$= \varphi(g) *_2 \varphi(g^{-1}) = \varphi(g) *_2 [\varphi(g)]^{-1} = e_2$$

$\therefore g *_1 k *_1 g^{-1} \in k_\varphi$

Karena 1,2,3,4,5 maka $K_\varphi$subgroup normal dari G_1.

Lemma 2.7.4

Misalkan $(G_1, *_1)$,$(G_2, *_2)$ suatu group.
φ suatu pemetaan homomorfisma dari G_1 ke G_2 dengan kernel K, $g \in G_2$ dan $x \in G_1$ dengan $\varphi(x) = g$, maka

$$\{y \in G_1 \mid \varphi(y) = g\} = K *_1 x.$$

Bukti:

Misalkan $(G_1, *_1)$,$(G_2, *_2)$ suatu group.
φ suatu pemetaan homomorfisma dari G_1 ke G_2 dengan kernel K,

$g \in G_2$ dan $x \in G_1$ dengan $\varphi(x) = g$.
Akan ditunjukkan $\{y \in G_1 \mid \varphi(y) = g\} = K *_1 x$
yaitu dengan menunjukkan:

1. $\{y \in G_1 \mid \varphi(y) = g\} \subseteq K *_1 x$
2. $K *_1 x \subseteq \{y \in G_1 \mid \varphi(y) = g\}$

1. Ambil $a \in \{y \in G_1 \mid \varphi(y) = g\}$. Akan ditunjukkan $a \in K *_1 x$ yaitudengan menunjukkan ada $k \in K$ sehingga $a = k *_1 x$.

   Karna $a \in \{y \in G_1 \mid \varphi(y) = g\}$ maka $a \in G_1$ dan $\varphi(a) = g$.
   Karna $x \in G_1$ dengan $\varphi(x) = g$ maka

   $$\varphi(a) = \varphi(x)$$

   Perhatikan bahwa
   (berdasarkan lemma 2.7.2)

   $$\begin{aligned}
   \varphi(a) &= \varphi(x) \\
   \varphi(a) *_2 [\varphi(a)]^{-1} &= \varphi(x) *_2 [\varphi(x)]^{-1} \\
   \varphi(a) *_2 (\varphi(x^{-1})) &= e_2 \\
   \varphi(a *_1 x^{-1}) &= e_2
   \end{aligned}$$

   Ini berarti $a *_1 x^{-1} \in K$.
   Karna $a *_1 x^{-1} \in K$ maka $a *_1 x^{-1} = k$,
   untuk suatu $k \in K$.Ini berarti $a = k *_1 x$.

2. Ambil $a \in K *_1 x$. Akan ditunjukkan $a \in \{y \in G_1 \mid \varphi(y) = g\}$ yaitu

   dengan menunjukkan $a \in G_1$ dan $\varphi(a) = g$.
   Karna $a \in K *_1 x$ dan $K *_1 x = \{k *_1 x \mid k \in K\}$ maka $a = k *_1 x$ untuksuatu $k \in K$.
   Karna $k \in K$ dan K subgroup normal dari G_1 (Lema 2.7.3) maka $k \in$
   G_1.
   Karna $k \in G_1$, $x \in G_1$ dan G_1 suatu group maka $a = k *_1 x \in G_1$.Perhatikan bahwa

   $\varphi(a) = \varphi(k *_1 x)$ dapat berlaku definisi 16
   $= \varphi(k) *_2 \varphi(x)$
   $= e_2 *_2 g$ karena $e_2 *_2$ dan g merupakan unsur identitas maka dapat ditulis dengan g
   $= g$

Definisi 18

Misalkan $(G_1, *_1)$, $(G_2, *_2)$ suatu group dan φ suatu pemetaan homomorfisma dari G_1 ke G_2

1. φ disebut homomorfisma satu-satu jika :
   (i) φ homomorfisma
   (ii) φ satu-satu
2. φ disebut homomorfisma pada jika :
   (i) φ homomorfisma
   (ii) φ pada
3. φ disebut isomorfisma jika :
   (i) φ homomorfisma
   (ii) φ satu-satu
   (iii) φ pada
4. G_1 disebut isomorfik dengan G_2 yang ditulis sebagai $G_1 \approx G_2$ jika terdapat suatu pemetaan isomorfisma dari G_1 ke G_2 atau dari G_2 ke G_1.

Contoh 1

$(\mathbb{Z}, +)$ suatu group
$G = \{2^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ $(G, \cdot)$ suatu group
$\varphi : (\mathbb{Z}, +) \to (G, \cdot)$
$n \to 2^n$
Suatu homomorfisma
$K_\varphi = \{0\}$.
φ : satu-satu

Contoh 2

$(\mathbb{R} - \{0\}, \cdot)$ suatu group. $G = \{-1,1\}$ $(G, \cdot)$ suatu group
$\varphi : (\mathbb{R} - \{0\}, \cdot) \to (G, \cdot)$
$x \to 1$, jika $x > 0$
$x \to -1$, jika $x < 0$
$K_\varphi = \{x \in \mathbb{R} - \{0\} \mid x > 0\}$

φ : bukan satu-satu

Contoh 3

$\varphi : (\mathbb{Z}, +) \to (\mathbb{R} - \{0\}, \cdot)$ suatu pemetaan homomorfisma

$x \quad \rightarrow 2^x$

Periksa apakah φ : satu-satu

φ : pada

Jawab :

(i) Ambil $x, y \in \mathbb{Z}$ dengan $f(x) = f(y)$. Akan ditunjukan $x = y$

Perhatikan bahwa :

$f(x) = f(y)$

$2^x = 2^y$

${}^2log\ 2^x = {}^2log\ 2^y$

$x = y$

φ : satu-satu

(ii) Ambil $y = -2 \in \mathbb{R} - \{0\}$

Maka tidak ada $x \in \mathbb{Z}$ sehingga $y = f(x)$ atau $-2 = 2^x$

φ : tidak pada

Contoh 4

$\varphi : (\mathbb{Z}_{2}, +_2)$

$0 \rightarrow 1$

$1 \rightarrow -1$

suatu pemetaan homomorfisma. Periksa apakah :

(i) φ satu-satu

(ii) φ pada

Jawab :

(i) 0 $\neq$ 1 dan $\varphi(0) = 1 \neq -1 = \varphi(1)$

$\therefore \varphi$ satu-satu

(ii) Untuk $y = 1 \in G$ ada $x = 0 \in \mathbb{Z}2$ $sehingga\ y = \varphi(x)$

Untuk $y = -1 \in G$ ada $x = 1 \in \mathbb{Z}2$ $sehingga\ y = \varphi(y)$

$\therefore \varphi$ pada

Karena φ suatu homomorfisma, satu-satu, dan pada maka φ suatupemetaan isomorfisma.

Karena ada pemetaan isomorfisma φ dari $\mathbb{Z}_2$ ke G maka $\mathbb{Z}_2$ isomorfik dengan G atau $\mathbb{Z}_2 \approx G$.

Akibat 1

Misalkan $(G_1, *_1),(G_2, *_2)$ suatu group dan φ suatu pemetaan homomorfisma dari G_1ke G_2, maka

$$\varphi : \text{satu-satu} \Leftrightarrow K_\varphi = \{e_1\}.$$

Bukti:

Misalkan $(G_1, *_1),(G_2, *_2)$ suatu group dan φ suatu pemetaanhomomorfisma dari G_1 ke G_2.

Akan ditunjukkan φ : satu-satu $\Leftrightarrow K_\varphi = \{e_1\}$.

$(\Rightarrow)$

Misalkan φ : satu-satu. Akan ditunjukkan $K_\varphi = \{e_1\}$ yaitu dengan menunjukkan

i. $K_\varphi \subseteq \{e_1\}$

ii. $\{e_1\} \subseteq K_\varphi$

(i) Ambil $x \in K_\varphi$. Akan ditunjukkan $x \in \{e1\}$ yaitu denganmenunnjukkan $x = e_1$.

Perhatikan bahwa

$\varphi\ (e_1) = e$

Karena $x \in K_\varphi$ maka $\varphi(x) = e_2$

Karena $\varphi\ (e_1) = \varphi(x)$ dan φ satu-satu maka $x = e_1$

(ii) Karena $\varphi\ (e_1) = e_2$ maka $e_1 \in K_\varphi$

Karena $e_1 \in K_\varphi$ maka $\{e_1\} \subseteq K_\varphi$

$(\Leftarrow)$

Misalkan $K_\varphi = \{e_1\}$. Akan ditunjukkan φ : satu-satu yaitu dengan menunjukkan setiap $x, y \in G_1$ dengan $\varphi(x) = \varphi(y)$ berlaku $x = y$.

Perhatikan bahwa

$$\varphi(x) = \varphi(y)$$
$$\varphi(x) *2\ [\varphi(y)]^{-1} = \varphi(y) *2\ [\varphi(y)]^{-1}$$
$$\varphi(x) *_2 [\varphi(y^{-1})] = e_2$$
$$\varphi(x *_1 y^{-1}) = e_2$$

Ini berarti $x *_1 y^{-1} \in K_\varphi$.

Karena $x *_1 y^{-1} \in K_\varphi$ dan $K_\varphi = \{e_1\}$, maka $x *_1 y^{-1} = e_1$ atau $x = y$.

Teorema 2.7.1

Misalkan $(G_1, *_1),(G_2, *_2)$ suatu group, dan φ suatu pemetaan homomorfisma pada dari G_1 ke G_2 dengan kernel K maka $G_1 / K \approx G_2$

Bukti:

Misalkan $(G_1, *_1),(G_2, *_2)$ suatu group dan φ suatu pemetaan homomorfisma pada dari G_1 ke G_2 dengan kernel K, akan ditunjukkan $G_1/K \approx G_2$ yaitu dengan menunjukkan ada suatu pemetaan isomorfisma f dari G_1/K ke G_2.

Buat pemetaan $f : G_1/K \to G_2$

$K * g \to \varphi(g)$

Akan ditunjukkan : f : terdefinisi dengan baik

f : homomorfisma

f : satu-satu

f : pada

1) Ambil $x, y \in G_1 / K$ dengan $x = y$. Akan ditunjukan $f(x) = f(y)$

Karena $x, y \in G_1 / K$ dan $G_1 / K = \{ K *_1 g \mid g \in G_1 \}$ Maka $x = K *_1 g_1$, $y = K *_1 g_2$ untuk suatu $g_1 , g_2 \in G_1$ Karena $x = y$ maka $K *_1 g = K *_1 g$ atau $\{ l *_1 g_1 \mid l \in K \} = \{ m *_1 g_2 \mid m \in K \}$

Akibatnya ada $l_1 \in K$ dan $m_1 \in K$ sehingga $l_1 *_1 g_1 = m_1 *_1 g_2$

atau $g_1 *_1 g_2^{-1} = l_1^{-1} * m_1$

Karena $l_1 , m_1 \in K$ dan K subgroup normal maka $l_1^{-1} * m_1 \in K$

Misalkan $l_1^{-1} * m_1 = k_1$ maka

$g_1 *_1 g_2^{-1} = k_1$ atau $g_1 = k_1 * g_2$ atau $k_1^{-1} * g_1 = g_2$ atau $g_1 = k_1 * g_2$

Perhatikan bahwa :

$f(x) = f(K *_1 g_1)$

$= \varphi(g_1)$

$= \varphi(k_1 *_1 g_2)$

$= \varphi(k_1) *_2 \varphi(g_2)$ (karena φ pemetaan homomorfisma)

$= e_2 *_2 \varphi(g_2)$

$= \varphi(g_2)$ ... (i)

$f(y) = f(K *_1 g_2)$

$= \varphi(g_2)$ ... (ii)

Dari (i) dan (ii) diperoleh $f(x) = f(y)$

2) Ambil $x, y \in G_1 / K$. Akan ditunjukan $f(x \circledast y) = f(x) *_2 f(y)$
Karena $x, y \in G_1 / K$ dan $G_1 / K = \{ K *_1 g \mid g \in G_1 \}$ Maka $x = K *_1 g_1$, $y = K *_1 g_2$ untuk suatu g_1 , $g_2 \in G_1$ Perhatikan bahwa :

$$
\begin{aligned}
f(x \circledast y) &= f(K *_1 g_1 \circledast K *_1 g_2) \\
&= f(K *_1 (g_1 *_1 g_2)) \\
&= \varphi(g_1 *_1 g_2) \\
&= \varphi(g_1) *_2 \varphi(g_2) \qquad [\ \varphi : \text{homomorfisma}\ ] \\
&= f(k *_1 g_1) *_2 f(k *_1 g_2) \\
&= f(x) *_2 f(y)
\end{aligned}
$$

3) Ambil $x, y \in G_1 / K$ dengan $f(x) = f(y)$. Akan ditunjukan $x = y$
Karena $x, y \in G_1 / K$ dan $G_1 / K = \{ k *_1 g \mid g \in G_1 \}$ Maka $x = K *_1 g_1$, $y = K *_1 g_2$ untuk suatu g_1 , $g_2 \in G_1$ Karena $f(x) = f(y)$ maka :

$$
\begin{aligned}
f(K *_1 g_1) &= f(K *_1 g_2) \\
\varphi(g_1) &= \varphi(g_2) \\
\varphi(g_1) *_2 [\varphi(g_2)]^{-1} &= e_2 \\
\varphi(g_1) *_2 \varphi(g_2)^{-1} &= e_2 \\
\varphi(g_1 *_1 g_2)^{-1} &= e_2
\end{aligned}
$$

Ini berarti $g_1 *_1 g^{-1} \in K$ atau $g_1 *_1 g^{-1} = k$ untuk suatu $k \in K$ atau $g_1 = k *_1 g_2$
Perhatikan bahwa :

$x = K *1\ g1 = K *1\ (k *1\ g2) = (K *1\ k) \circledast (K *1\ g2)$

$= (K *_1 e_1) \circledast (k *_1 g_2)$ (Karena $k \in K$, maka $K *_1 k = K *_1 e_1$)
$= K *_1 (e_1 *_1 g_2) = K *_1 g_2$
$= y$

$\therefore f$ satu-satu

4) Ambil $y \in G_2$. Akan ditunjukan ada $x \in G_1 / K$ sehingga $y = f(x)$. Karena $g \in G_2$ dan φ suatu pemetaan homomorfisam pada dari G_1 ke G_2
, maka ada $z \in G_1$ sehingga $y = \varphi(z)$.
Pilih $x = K *_1 z$ maka $f(x) = f(K *_1 z) = y(z) = y$

$\therefore f$ pada

Contoh 5

Misalkan $(G, *)$ suatu group dan $g \in G$.
Definisikan pemetaan
$\varphi : G \to G$

$$x \to g * x * g^{-1}$$

Tunjukan bahwa φ suatu isomorfisma
Jawab :

1. Ambil $a, b \in G$

   Akan ditunjukan φ homomorfisma yaitu dengan menunjukan $\varphi(a * b) = \varphi(a) * \varphi(b)$

   Perhatikan bahwa :

   $$\begin{aligned} \varphi(a * b) &= g * (a * b) * g^{-1} \\ &= g * (a * e * b) * g^{-1} \\ &= g * (a * g * g^{-1} * b) * g^{-1} \\ &= (g * a * g^{-1}) * (g^{-1} * b * g) \\ &= \varphi(a) * \varphi(b) \end{aligned}$$

   Karena a,b ∈ G dan G = x, maka dapat dinyatakan bahwa G merupakan unsur identitas dari $g * g^{-1}$. Berdasarkan lemma 2.6.1

   $\therefore \varphi(a * b) = \varphi(a) * \varphi(b)$

2. Ambil $a, b \in G$ dengan $\varphi(a) = \varphi(b)$

   Akan ditunjukan $a = b$

   Perhatikan bahwa :

Karena nilai dari $\varphi(a) = \varphi(b)$ sudah didapat dari pernyataan 1 maka untuk unsur identitas g^{-1} dapat dibagi

$$\begin{aligned} \varphi(a) &= \varphi(b) \\ (g * a * g^{-1}) &= (g * b * g^{-1}) \\ g^{-1} (g * a * g^{-1})\, g &= g^{-1} (g * b * g^{-1})\, \mathrm{g} \\ a &= b \end{aligned}$$

$\therefore \varphi$ satu-satu

3. Ambil $y \in G$, akan ditunjukkan ada $x \in G$ sehingga $y = \varphi(x)$
   Pilih $x = g^{-1} * y * g$
   Maka $\varphi(x) = g * (g^{-1} * y * g) * g^{-1} = y$
   $\therefore \varphi$ pada

Karena 1,2,3 maka φ suatu isomorfisma

Contoh 6

$G = \{a + b_i \mid a, b \in \mathbb{R}, a$ dan b tidak boleh keduanya nol$\}(G, \cdot)$ suatu group

$\bar{G} = \{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R}$, a dan b tidak keduanya nol $\}$

$(G, \cdot)$ suatu group. Tunjukan bahwa G isomorfik dengan $\bar{G}$

Jawab :

Buat pemetaan $\varphi : G \to \bar{G}$

$$a + b_i \to \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

Tunjukan φ : homomorfisma, satu-satu, dan pada

1. Ambil $x, y \in G$. Akan ditunjukan $\varphi(x, y) = \varphi(x).\varphi(y)$
   Karena $x, y \in G$ dan
   $G = \{a + b_i \mid a, b \in \mathbb{R}, a$ dan b tidak boleh keduanya nol$\}$ maka
   $x = a_1 + b_1\, i$, $y = a_2 + b_2\, i$ untuk suatu a_i, $b_i \in \mathbb{R}$, a_i dan b_i tidakkeduanya nol, i = 1, 2.
   Perhatikan bahwa :

$$\varphi(x) = \varphi(a_1 + b_1\, i) = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1 \end{pmatrix}$$

$$\varphi(y) = \varphi(a_2 + b_2\, i) = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ -b_2 & a_2 \end{pmatrix}$$

$$\varphi(x).\varphi(y) = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ -b_2 & a_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_1a_2 - b_1b_2 & a_1b_2 + b_1a_2 \\ -b_1a_2 - a_1b_2 & -b_1b_2 + a_1a_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_1a_2 - b_1b_2 & a_1b_2 + b_1a_2 \\ -(a_1b_2 + b_1a_2) & a_1a_2 - b_1b_2 \end{pmatrix} \quad \ldots (*)$$

$$x.y = (a_1 + b_1\, i) \,.\, (a_2 + b_2\, i)$$
$$= a_1\,(a_2 + b_2\, i) + b_1\, i\,(a_2 + b_2\, i)$$
$$= a_1\, a_2 + a_1\, b_2\, i + a_2\, b_1\, i - b_1\, b_2$$
$$= a_1\, a_2 - b_1\, b_2 + (a_1\, b_2 + a_2\, b_1)\, i$$

$$\varphi(x.y) = \begin{pmatrix} a_1a_2 - b_1b_2 & a_1b_2 + a_2b_1 \\ -(a_1b_2 + a_2b_1) & a_1a_2 - b_1b_2 \end{pmatrix} \quad \ldots (**)$$

Dari (*) dan (**) diperoleh $\varphi(x,y) = \varphi(x).\varphi(y)$

$\therefore \varphi$ homomorfisma

2. Ambil $x, y \in G$ dengan $\varphi(x) = \varphi(y)$

   Akan ditunjukan $x = y$

   Karena $x, y \in G$ dan

   $G = \{a + b\mathrm{i} \mid a, b \in \mathbb{R}, a$ dan b tidak boleh keduanya nol$\}$ maka

   $x = a_1 + b_1\, i$, $y = a_2 + b_2\, i$ untuk suatu a_i, $b_i \in \mathbb{R}$, $i = 1,2$

   dimana

   a_i dan b_i

   tidak

   keduanya

   nol

   Perhatikan

   bahwa :

   $\varphi(x) = \varphi(y)$

   $\varphi(a_1 + b_1\, i) = \varphi(a_2 + b_2\, i)$

   $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ -b_2 & a_2 \end{pmatrix}$

   Diperoleh $a_1 = a_2$ dan $b_1 = b_2$, akibatnya

   $x = a_1 + b_1\, i = a_2 + b_2\, i = y$

   φ : satu-satu

3. Ambil $y \in \bar{G}$. Akan ditunjukan ada $x \in G$

   sehingga $y = \varphi(x)$.Karena $y \in \bar{G}$ dan

   $\bar{G} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R}, a \text{ dan } b \text{ tidak keduanya nol} \right\}$

   Maka $y = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1 \end{pmatrix}$ untuk suatu $a_1, b_1 \in \mathbb{R}$

   dan a_1, b_1 tidak keduanya nol

   Pilih $x = a_1 + b_1\, i$, karena $a_1, b_1 \in \mathbb{R}$ dan a_1, b_1 tidak keduanya nolMaka $x \in G$

   Perhatikan bahwa :

   $\varphi(x) = \varphi(a_1 + b_1\, i) = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1 \end{pmatrix} = y$

Karena 1, 2, dan 3 maka φ suatu isomorfisma

Karena ada suatu isomorfisma φ dari G ke $\bar{G}$ maka $G \approx \bar{G}$

Cara lain untuk menunjukan φ : satu-satu :

$K\varphi = \{x \in G \mid \varphi(x) = e_2\}$

$= \{x \in \{a + b\mathrm{i} \mid a, b \in \mathbb{R}, a$ dan b tidak boleh keduanya nol$\} \mid \varphi(x)$

$= e_2\}$

$= \{ a + b\ i |$ a, b$\in \mathbb{R}$ dan a, b tidak keduanya nol $| \varphi(a + b\ i) = e_2 \}$

$= \{ a + b\ i |$ a, b$\in \mathbb{R}$ dan a, b tidak keduanya nol$| \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \}$

$= \{ a + b\ i |$ a, b$\in \mathbb{R}$ dan a, b tidak keduanya nol | a = 1, b = 0 }

= { 1+0i} = {1}

Karena $K\varphi = \{1\}$ maka menurut akibat 1, φ : satu-satu

DEFINISI 19

Misalkan R suatu himpunan yang tak kosong. R disebut **ring/ gelanggang** jika di R dapat didefinisikan 2 operasi yang dilambangkan dengan + dan $\cdot$ yang memenuhi :

1. Setiap $a, b \in R$ berlaku $a + b \in R$
2. Setiap $a, b \in R$ berlaku $a + b = b + a$
3. Setiap $a, b \in R$ berlaku $a + (b + c) = (a + b) + c$
4. Ada suatu unsur di R yang dilambangkan dengan 0 sehingga setiap $a \in R$ berlaku $a + 0 = a$
5. Setiap $a \in R$ ada unsur di R yang dilambangjan dengan $-a$ sehingga $a + (-a) = 0$
6. Setiap $a, b \in R$ berlaku $a \cdot b \in R$
7. Setiap $a, b, c \in R$ berlaku $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
8. Setiap $a, b, c \in R$ berlaku
   (i) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$
   (ii) $(b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$

DEFINISI 20

Misalkan (, + , $\cdot$) suatu ring .

1. R disebut **ring dengan unsur satuan** jika ada suatu unsur di R yang dilambangkan dengan 1 sehingga setiap $a \in R$ berlaku $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$
2. R disebut **ring komutatif** jika setiap $a, b \in R$ berlaku $a \cdot b = b \cdot a$

DEFINISI 21

Misalkan (, + , $\cdot$) suatu ring komutatif dan $a \in R$ dengan $a \neq 0$, a **disebut pembagi nol** di R jika ada $b \in R$ dan $b \neq 0$ sehingga $a \cdot b = 0$

DEFINISI 22

Misalkan (, + , $\cdot$) suatu ring komutatif. R disebut **daerah integral** jika R tidak memuat pembagi nol yaitu setiap $a, b \in R$ dengan $a \neq 0$ dan $b \neq 0$ berlaku $a \cdot b \neq 0$ atau setiap $a, b \in R$ dengan $a \cdot b = 0$ berlaku $a = 0$ atau $b = 0$

DEFINISI 23

Misalkan (, + , ·) suatu ring. R disebut **division ring** (gelanggang hasil bagi) jika ($R - \{0\}$, ·) suatu grup.

DEFINISI 24

Misalkan (, + , ·) suatu ring. R disebut **lapangan** jika :

1. Setiap $a, b \in R$ berlaku $a \cdot b = b \cdot a$
2. ($R - \{0\}$, ·) suatu group

DEFINISI 24*

Misalkan R suatu himpunan yang tak kosong. R dsebut **lapangan** jika di R dapat didefinisikan dua operasi yang dilambangkan dengan + dan · yang memenuhi

1. Setiap $a, b \in R$ berlaku $a + b \in R$
2. Setiap $a, b \in R$ berlaku $a + b = b + a$
3. Setiap $a, b \in R$ berlaku $a + (b + c) = (a + b) + c$
4. Ada suatu unsur di R yang dilambangkan dengan 0 sehingga setiap $a \in R$ berlaku $a + 0 = a$
5. Setiap $a \in R$ ada unsur di R yang dilambangjan dengan $-a$ sehingga $a + (-a) = 0$
6. Setiap $a, b \in R$ berlaku $a \cdot b \in R$
7. Setiap $a, b, c \in R$ berlaku $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
8. Setiap $a, b, c \in R$ berlaku
   (i) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$
   (ii) $(b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$
9. Setiap $a, b \in R$ berlaku $a \cdot b = b \cdot a$
10. Ada unsur di R yang dilambangkan dengan 1 sehingga setiap $a \in R$ berlaku $a \cdot 1 = a$

DFINISI 24**

Misalkan R suatu himpunan yang tak kosong. R dsebut **lapangan** jika di R dapat didefinisikan dua operasi yang dilambangkan dengan + dan $\cdot$ yang memenuhi

1. $(R, +)$ suatuu group komutatif
2. $(R - \{0\}, \cdot\,)$ suatu group komutatif
3. Setiap $a, b \in R$ berlaku
   (i) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$
   (ii) $(b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$

DEFINISI 22*

Misalkan R suatu himpunan yang tak kosong. R dsebut **daerah integral** jika di R dapat didefinisikan dua operasi yang dilambangkan dengan + dan $\cdot$ yang memenuhi :

1. Setiap $a, b \in R$ berlaku $a + b \in R$
2. Setiap $a, b \in R$ berlaku $a + b = b + a$
3. Setiap $a, b \in R$ berlaku $a + (b + c) = (a + b) + c$
4. Ada suatu unsur di R yang dilambangkan dengan 0 sehingga setiap $a \in R$ berlaku $a + 0 = a$
5. Setiap $a \in R$ ada unsur di R yang dilambangjan dengan $-a$ sehingga $a + (-a) = 0$
6. Setiap $a, b \in R$ berlaku $a \cdot b \in R$
7. Setiap $a, b, c \in R$ berlaku $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
8. Setiap $a, b, c \in R$ berlaku
   (i) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$
   (ii) $(b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$
9. Setiap $a, b \in R$ berlaku $a \cdot b = b \cdot a$
10. Setiap $a, b \in R$ dengan $a \cdot b = 0$ berlaku $a = 0$ atau $b = 0$

Contoh 1

Akan ditunjukkan $(\mathbb{Z}_6, +_6, \cdot_6)$ suatu ring. Jawab:

$+_6$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{5}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$

$\cdot_6$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$
$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{5}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

1. Dari tabel penjumlahan modulo 6 terlihat bahwa setiap $x, y \in \mathbb{Z}_6$ berlaku $x +_6 y \in \mathbb{Z}_6$
2. Dari tabel penjumlahan modulo 6 terlihat bahwa setiap $x, y \in \mathbb{Z}_6$ berlaku $x +_6 y = y +_6 x$
3. Dengan menggunakan tabel penjumlahan modulo 6 dapat ditunjukkan bahwa setiap $x, y, z \in (\mathbb{Z}_6$ berlaku $x +_6 (y +_6 z) = (x +_6 y) +_6 z$

   Contoh : $x = \bar{2}$, $y = \bar{3}$, $z = \bar{4}$

   $$x +_6 (\ +_6 z) = \bar{2} +_6 (\bar{3} +_6 \bar{4}) = \bar{2} +_6 \bar{1} = \bar{3}$$

   $$(\ +_6 y) +_6 z = (\bar{2} +_6 \bar{3}) +_6 \bar{4} = \bar{5} +_6 \bar{4} = \bar{3}$$
4. Dari tabel penjumlahan modulo 6 terlihat bahwa ada $0 = \bar{0} \in \mathbb{Z}_6$ sehingga setiap $x \in (\mathbb{Z}_6$ berlaku $x +_6 \bar{0} = x$
5. Dari tabel penjumlahan modulo 6 diperoleh

$-\bar{0} = \bar{0}$, $-\bar{1} = \bar{5}$, $-\bar{2} = \bar{4}$, $-\bar{3} = \bar{3}$, $-\bar{4} = \bar{2}$, $-\bar{5} = \bar{1}$

6. Dari tabel perkalian modulo 6 terlihat bahwa setiap $x, y \in \mathbb{Z}_6$ berlaku $x \cdot_6 y \in \mathbb{Z}_6$

7. Dengan menggunakan tabel perkalian modulo 6 dapat ditunjukkan bahwa setiap $x, y, z \in \mathbb{Z}_6$ berlaku $x \cdot_6 (y \cdot_6 z) = (x \cdot_6 y) \cdot_6 z$ Contoh : $x = \bar{3}$, $y = \bar{4}$, $z = \bar{5}$

$$x \cdot_6 (\ \cdot_6 z) = \bar{3} \cdot_6 (\bar{4} \cdot_6 \bar{5})$$
$$= \bar{3} \cdot_6 \bar{2} = \bar{0}$$
$$(x \cdot_6 \ ) \cdot_6 z = (\bar{3} \cdot_6 \bar{4}) \cdot_6 \bar{5}$$
$$= \bar{0} \cdot_6 \bar{5} = \bar{0}$$

8. Dengan menggunakan tabel perkalian dan penjumlahan modulo 6 dapat ditunjukkan bahwa setiap $x, y, z \in \mathbb{Z}_6$ berlaku
   (i) $x \cdot_6 (y + z) = x \cdot_6 y + x \cdot_6 z$
   (ii) $(y + z) \cdot_6 x = y \cdot_6 x + z \cdot_6 x$

   Contoh : $x = \bar{2}$, $y = \bar{4}$, $z = \bar{5}$
   (i) $x \cdot_6 (y +_6 z) = \bar{2} \cdot_6 (\bar{4} +_6 \bar{5}) = \bar{2} \cdot_6 \bar{3} = \bar{0}$

   $x \cdot_6 y +_6 x \cdot_6 z = \bar{2} \cdot_6 \bar{4} +_6 \bar{2} \cdot_6 \bar{5} = \bar{2} +_6 \bar{4} = \bar{0}$
   (ii) $(y + z) \cdot_6 x = (\bar{4} + \bar{5}) \cdot_6 \bar{2} = \bar{3} \cdot_6 \bar{2} = \bar{0}$ $y \cdot_6 x + z \cdot_6 x = \bar{4} \cdot_6 \bar{2} + \bar{5} \cdot_6 \bar{2} = \bar{2} +_6 \bar{4} = \bar{0}$

∴ Karena 1 sampai 8 maka $(\mathbb{Z}_6, +_6, \cdot_6)$ suatu ring.

9. Dari tabel perkalian modulo 6 terlihat bahwa setiap $x, y \in \mathbb{Z}_6$ berlaku $x \cdot_6 y = y \cdot_6 x$

∴ Karena 1 sampai 9 maka $(\mathbb{Z}_6, +_6, \cdot_6)$ suatu ring komutatif.

10. Pilih $x, y \in \mathbb{Z}_6$ dengan $x = \bar{2} \neq \bar{0}$ dan $y = \bar{3} \neq \bar{0}$

    Perhatikan bahwa

$$\bar{2} \cdot_6 \bar{3} = \bar{0}$$

∴ $(\mathbb{Z}_6, +_6, \cdot_6)$ bukan daerah integral karena memuat pembagi nol yaitu $\bar{2}$ dan $\bar{3}$

11. Dari tabel perkalian modulo 6 terlihat bahwa ada $1 = \bar{1}$ sehingga setiap $x \in R$ berlaku $x \cdot_6 1 = x$

$\therefore (\mathbb{Z}_6, +_6, \cdot_6)$ suatu ring komutatif dengan unsur satuan.

12. $(\mathbb{Z}_6, +_6, \cdot_6)$ bukan lapangan karena $\bar{2} \in \mathbb{Z}_6$ dan $\bar{2}^{-1}$ tidak ada.

CONTOH

Tulis $G = \left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| a \in \mathbb{R}\right\}$, Setiap $x = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in G$

Definisikan operasi + dan · sebagai berikut.

$$x + y = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$x \cdot y = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \cdot a_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Periksa apakah G suatu ring
2. Periksa apakah G suatu daerah integral
3. Periksa apakah G suatu lapangan

JAWAB:

1. Ambil $x, y \epsilon G$. Adt $x + y \epsilon G$

   Karena $x, y \epsilon$ dan $G = \left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| a \in \mathbb{R}\right\}$ maka

   $x = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ untuk suatu $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$

   Perhatikan bahwa :

   $$\begin{aligned} x + y &= \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

   Karena $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ maka $a_1 + a_2 \in \mathbb{R}$ Akibatnya,

   $$x + y = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in G$$

   $\therefore \forall x, y \in G$ berlaku $x + y \in G$

2. Ambil $x, y \epsilon G$. Adt $x + y = y + x$

   Karena $x, y \epsilon G$ dan $G = \left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| a \in \mathbb{R}\right\}$ maka

   $x = \begin{pmatrix} a1 & 0 \\ 0 & 0, \end{pmatrix} y = \begin{pmatrix} a2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ untuk suatu $a_1, a_2 \epsilon \mathbb{R}$

   Perhatikan bahwa:

   $$\begin{aligned} x + y &= \begin{pmatrix} a1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a1 + a2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a2 + a1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = y + x \end{aligned}$$

   $\therefore \forall x, y \in G$ berlaku $x + y = y + x$

3. Ambil $x, y, z \in G$. Adt $x + (y + z) = (x + y) + z$

Karena $x, y, z \in G$ dan $G = \left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| a \in \mathbb{R}\right\}$ maka

$x = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, z = \begin{pmatrix} a_3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ untuk suatu $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$

Perhatikan bahwa :

$$\begin{aligned}
x + (y + z) &= \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right] \\
&= \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 + a_3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_1 + (a_2 + a_3) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (a_1 + a_2) + a_3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \left[\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right] + \begin{pmatrix} a_3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= (x + y) + z
\end{aligned}$$

$\therefore \forall x, y, z \in G$ berlaku $x + (y + z) = (x + y) + z$

4. Ambil $x \in G$. Adt ada $0 \in G$ sehingga berlaku $x + 0 = x$

Karena $x \in G$ dan dan $G = \left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| a \in \mathbb{R}\right\}$ maka

$x = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ untuk suatu $a_1 \in \mathbb{R}$

Pilih $0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Perhatikan bahwa :

$$\begin{aligned}
x + 0 &= \begin{pmatrix} a1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a1 + 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = x
\end{aligned}$$

$\therefore \forall x \in G$ ada $0 \in G$ sehingga berlaku berlaku $x + 0 = x$

5. Ambil $x \in G$. Adt ada $-x \in G$ sehingga berlaku $x + (-x) = 0$

Karena $x \in G$ dan $G = \left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| a \in \mathbb{R}\right\}$ maka

$x = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ untuk suatu $a_1 \in \mathbb{R}$

Pilih $-x = \begin{pmatrix} -a_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Karena $a_1 \in \mathbb{R}$ maka $-a_1 \in \mathbb{R}$ sehingga $-x \in G$ Perhatikan bahwa :

$$x + (-x) = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} a_1 + (-a_1) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$= 0$$

$\therefore \forall x \in G$ ada $-x \in G$ sehingga berlaku berlaku $x + (-x) = 0$

6. Ambil , $y \in G$. Adt $x \cdot y \in G$

   Karena , $y \epsilon G$ dan $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| a \in \mathbb{R} \right\}$ maka

   $x = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ untuk suatu $a_1, a_2 \epsilon \mathbb{R}$

   Perhatikan bahwa :

   $$x \cdot y = \begin{pmatrix} a^1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
   $$= \begin{pmatrix} a_1 \cdot a_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   Karena $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ maka $a_1 \cdot a_2 \in \mathbb{R}$ Akibatnya,

   $$x \cdot y = \begin{pmatrix} a_1 \cdot a_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in G$$

   $\therefore \forall x, y \in G$ berlaku $x \cdot y \in G$

7. Ambil $x, y, z \in G$. Adt $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$

   Karena $x, y, z \in G$ dan $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| a \in \mathbb{R} \right\}$ maka

   $x = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, z = \begin{pmatrix} a_3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ untuk suatu $a_1, a_2, a_3 \epsilon \mathbb{R}$

   Perhatikan bahwa :

   $$x \cdot (y \cdot z) = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right]$$
   $$= \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2 \cdot a_3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
   $$= \begin{pmatrix} a_1 \cdot (a_2 \cdot a_3) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
   $$= \begin{pmatrix} (a_1 \cdot a_2) \cdot a_3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
   $$= \begin{pmatrix} a_1 \cdot a_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
   $$= \left[\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} a_3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
   $$= (x \cdot y) \cdot z$$

   $\therefore \forall x, y, z \in G$ berlaku $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$

8. Ambil $x, y, z \in G$. Adt $x \cdot (y + z) = x \cdot y + xz$ dan $(y + z) \cdot x = y \cdot x + z \cdot x$

Karena $x, y, z \in$ dan $G = \left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| a \in \mathbb{R}\right\}$ maka

$x = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, z = \begin{pmatrix} a_3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ untuk suatu $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$

Perhatikan bahwa : a. $x \cdot (y + z) = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right]$

$= \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2 + a_3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} a_1 \cdot (a_2 + a_3) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} a_1 \cdot a_2 + a_1 \cdot a_3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} a_1 \cdot a_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \cdot a_3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$= \left[\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right] + \left[\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right]$

$= (x \cdot y) + (x \cdot z)$

b. $(y + z) \cdot x = \left[\begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} a_2 + a_3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} (a_2 + a_3) \cdot a_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} a_2 \cdot a_1 + a_3 \cdot a_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} a_2 \cdot a_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_3 \cdot a_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$= \left[\begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right] + \left[\begin{pmatrix} a_3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right]$

0 0 0 0 0 0 0 0

$= (y \cdot x) + (z \cdot x)$

$\therefore \forall x, y, z \in G$ berlaku $x \cdot (y + z) = x \cdot y + xz$ dan $(y + z) \cdot x = y \cdot x + z \cdot x$ Karena 1,2,3,4,5,6,7,8 maka G suatu ring.

Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa G suatu daerah Integral, yaitu dengan menunjukkan bahwa:

(9) G suatu komutatif terhadap operasi perkalian dan

(10) G tidak mempunyai pembagi nol

9. Ambil $x, y \in G$. Adt $x \cdot y = y \cdot x$

   Karena $x, y \in G$ dan $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| a \in \mathbb{R} \right\}$ maka

   $x = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ untuk suatu $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$

   Perhatikan bahwa :

   $$x \cdot y = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
   $$= \begin{pmatrix} a_1 \cdot a_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
   $$= \begin{pmatrix} a_2 \cdot a_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
   $$= \begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
   $$= y \cdot x$$

   $\therefore \forall x, y \in G$ berlaku $x \cdot y = y \cdot x$

Selanjutnya, akan ditujukkan bahwa G tidak mempunyai pembagi nol, yaitu dengan menunjukkan:

setiap $x, y \in G$ dengan $x \cdot y = 0$ berlaku $x = 0$ atau $y = 0$ (cara 1) **atau**

setiap $x, y \in G$ dengan $x \neq 0$ dan $y \neq 0$ berlaku $x \cdot y \neq 0$ (cara 2)

10. (i) Ambil $x, y \in G$ dengan $x \cdot y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Adt $x = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ atau $y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

    Karena $x, y \in G$ dan $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| a \in \mathbb{R} \right\}$ maka

    $x = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ untuk suatu $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$

    Karena $x \cdot y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ maka $\begin{pmatrix} a_1 \cdot a_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

    Akibatnya $a_1 \cdot a_2 = 0$

    Karena $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ dan $a_1 \cdot a_2 = 0$ maka $a_1 = 0$ atau $a_1 = 0$

    Ini berarti $x = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ atau $y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\therefore \forall x, y \in G$ dengan $x \cdot y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ berlaku $x = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ atau $y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(ii) Ambil $x, y \in G$ dengan $x \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ dan $y \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Adt $x \cdot y \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Karena $x, y \in$ dan $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| a \in \mathbb{R} \right\}$ maka

$x = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ untuk suatu $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$

Karena $x \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ maka $a_1 \neq 0$

Karena $y \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ maka $a_2 \neq 0$

Karena $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ dan $a_1 \neq 0$, $a_2 \neq 0$ maka $a_1 \cdot a_2 \neq 0$

Akibatnya,

$$x \cdot y = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \cdot a_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\therefore \forall x, y \in G$ dengan dengan $x \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ dan $y \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ berlaku $x \cdot y \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Karena 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10 (i) maka G suatu daerah integral atau

Karena 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10 (ii) maka G suatu daerah integral

11. Ambil $x \in G$. Adt ada $1 \in$ sehingga berlaku $x \cdot 1 = x$

Karena $\in G$ dan $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| a \in \mathbb{R} \right\}$ maka

$x = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ untuk suatu $a_1 \in \mathbb{R}$

Pilih $1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Perhatikan bahwa :

$$x.1 = \begin{pmatrix} a1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} a1.1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = x$$

$\therefore \forall x \in G$ ada $1 \in G$ sehingga berlaku $x \cdot 1 = x$

12. Ambil $x \in G$ dengan $x \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Adt ada $x^{-1} \in G$ sehingga berlaku $x \cdot x^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Karena $x \in G$ dan $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| a \in \mathbb{R} \right\}$ maka

$x = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ untuk suatu $a_1 \in \mathbb{R}$

Karena $x \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ maka $a_1 \neq 0$

Pilih $x^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Perhatikan bahwa :

$$x \cdot x^{-1} = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{a_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 \cdot \frac{1}{a_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1 0

= ( )

1 0

= 1

$\therefore \forall x \in G$ dengan $x \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ada $x^{-1} \in G$ sehingga berlaku

$$x \cdot x^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Karena 1,2,3,4,5,6,7,8,9,11,12 maka G suatu lapangan

LEMMA 3.2.1 (i)

Jika $(R, +, \cdot)$ suatu ring maka :

1. Setiap $a \in R$ berlaku $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$
2. Setiap $a, b \in R$ berlaku $a \cdot (-b) = (-a) \cdot b = -(a \cdot b)$
3. Setiap $a, b \in R$ berlaku $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$

BUKTI :

Misalkan $(R, +, \cdot)$ suatu ring.

Adt : 1. Setiap $a \in R$ berlaku $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$

2. Setiap $a, b \in R$ berlaku $a \cdot (-b) = (-a) \cdot b = -(a \cdot b)$
3. Setiap $a, b \in R$ berlaku $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$

1. Ambil $a \in R$. Adt $a \cdot 0 = 0$ dan $0 \cdot a = 0$ Perhatikan bahwa :

a .0 = a . 0

= a . 0 + 0

= a . 0 + (a + (- a))

= a . 0 + a + (- a)

= a . 0 + a . 1 + (- a)

= a(0 + 1) + (- a)

= a . 1 + (- a)

$= a + (-a)$

$= 0$

$a \cdot 0 = a \cdot (0 + 0) = a \cdot 0 + a \cdot 0$

$-(a \cdot 0) + a \cdot 0 = -(a \cdot 0) + a \cdot 0 + a \cdot 0$

$0 = 0 + a \cdot 0$

$0 = a \cdot 0$ Perhatikan bahwa :

$0 \cdot a = (0 + 0) \cdot a = 0 \cdot a + 0 \cdot a$

$-(0 \cdot a) + 0 \cdot a = -(0 \cdot a) + 0 \cdot a + 0 \cdot a$

$0 = 0 + 0 \cdot a$

$0 = 0 \cdot a$

2. Ambil $a, b \in R$. Adt $a \cdot (-b) = -(a \cdot b)$ dan $(-a) \cdot b = -(a \cdot b)$
   a. Adt $a \cdot (-b) = -(a \cdot b)$ yaitu dengan menunjukkan $a \cdot (-b) + a \cdot b = 0$ Perhatikan bahwa :

   $$a \cdot (-b) + a \cdot b = a \cdot (-b + b) = a \cdot 0 = 0$$

   atau

   $$\begin{aligned} a \cdot (-b) &= a \cdot (-b) + 0 \\ &= a \cdot (-b) + a \cdot b + (-(a \cdot b)) \\ &= a \cdot (-b + b) + (-(a \cdot b)) \\ &= a \cdot 0 + (-(a \cdot b)) \\ &= -(a \cdot b) \end{aligned}$$

   b. Adt $(-a) \cdot b = -(a \cdot b)$ yaitu dengan menunjukkan $(-a) \cdot b + a \cdot b = 0$ Perhatikan bahwa :

   $(-a) \cdot b + a \cdot b = (-a + a) \cdot b = 0 \cdot b = 0$

3. Ambil , $b \in R$. Adt $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$

   Perhatikan bahwa

   $$\begin{aligned} (-a) \cdot (-b) &= -(a) \cdot c, \quad \text{(misalkan c = -b)} \\ &= -(a \cdot c) \\ &= -(a \cdot (-b)) \\ &= -(-(a \cdot b)) \\ &= a \cdot b \end{aligned}$$

LEMMA 3.2.1 (ii)

Jika $(R, +, \cdot)$ suatu ring dengan unsur satuan $(1 \in R)$ maka :

1. Setiap $a \in R$ berlaku $(-1) \cdot a = -a$
2. $(-1) \cdot (-1) = 1$

BUKTI :

Misalkan $(R, +, \cdot)$ suatu ring dengan unsur satuan. Adt :

1. Setiap $a \in R$ berlaku $(-1) \cdot a = -a$
2. $(-1) \cdot (-1) = 1$

1. Ambil $a \in R$ adt $(-1) \cdot a = -a$ Perhatikan bahwa

   $$\begin{aligned}(-1) \cdot a &= (-1) \cdot a + 0 \\ &= (-1) \cdot a + a + (-a) \\ &= (-1) \cdot a + 1 \cdot a + (-a) \\ &= (-1 + 1) \cdot a + (-a) \\ &= 0 \cdot a + (-a) \\ &= 0 + (-a) \\ &= -a\end{aligned}$$

2. Adt $(-1) \cdot (-1) = 1$

   Karena setiap $a, b \in R$ maka menurut lema 3.2.1, berlaku $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$ Maka untuk $a = 1$, $b = 1$ diperoleh :

   $(-1) \cdot (-1) = 1 \cdot 1 = 1$

   Dari teorema (- 1) a = - a jika a diganti dengan -1

   Maka (- 1)(- 1) = - (- 1)

   Dari teorema -(-a)=a, jika a diganti dengan 1

   Maka-(-1) = 1

   (- 1)(- 1) = - (- 1) = 1

PRINSIP SARANG BURUNG MERPATI

Jika ada n burung merpati yang akan dimasukkan dalam m sarang dengan $n > m$ maka paling sedikit ada satu sarang yang ditempati oleh paling sedikit 2 burung.

LEMMA 3.2.2

Jika $(R, +, \cdot)$ suatu daerah integral hingga maka $(R, +, \cdot)$ suatu lapangan.

BUKTI:

Misalkan $(R, +, \cdot)$ suatu daerah integral hingga dengan $R = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Adt $(R, +, \cdot)$ suatu lapangan dalam hal ini tinggal ditunjukkan:

1. R memuat unsur identitas terhadap operasi perkalian $\cdot$ $(1 \in R)$
2. Setiap $a \in R$ dengan $a \neq 0$ ada $b \in R$ sehingga $a \cdot b = 1$

1. Ambil $a \in R$ dengan $a \neq 0$

   Perhatikan bahwa :

   $a \cdot x_1, a \cdot x_2, \dots, a \cdot x_n \in R$ Adt a

   $\cdot\, x_i \neq a \cdot x_j$, $\forall i \neq j$ Andaikan $a \cdot$

   $x_i = a \cdot x_j$ maka

   $a \cdot x_i - a \cdot x_j = 0$ (kita pindahkan negatif)

   $a \cdot x_i + a \cdot (-x_j) = 0$ (kita rubah menggunakan sifat asosiatif)

   $a \cdot (x_i - x_j) = 0$

   Karena $(R, +, \cdot)$ suatu daerah integral, $a \neq 0$ dan $a \cdot (x_i - x_j) = 0$ maka $x_i - x_j = 0$ atau $x_i = x_j$

   Ini kontradiksi dengan $a \cdot x_i \neq a \cdot x_j$ $\forall i \neq j$

   Berdasarkan Prinsip Sarang Burung Merpati diperoleh :

   $$\{x_1, x_2, \dots, x_n\} = \{a \cdot x_1, a \cdot x_2, \dots, a \cdot x_n\}$$

   Karena $a \in R$ maka ada $a \cdot x_k \in R$ sehingga $a = a \cdot x_k$

   Adt x_k berperan sebagai unsur identitas di R terhadap operasi perkalian $\cdot$

   Ambil $y \in R$. Adt $y \cdot x_k = y$

   Karena $y \in R$ dan $R = \{a \cdot x_1, a \cdot x_2, \dots, a \cdot x_n\}$ maka

   $$y = a \cdot x_l \text{ untuk suatu } l \in \{1, 2, \dots, n\}$$

   Perhatikan bahwa

   $y \cdot x_k = (a \cdot x_l) \cdot x_k = a \cdot (x_l \cdot x_k) \quad = a \cdot (x_k \cdot x_l)$

   Kita gunakan sifat asosiatif $\quad = (a \cdot x_k) \cdot x_l$

   Karena merupakan identitas $(a \cdot x_k) = a$, maka

   $= a \cdot x_l$

Jadi ada $1 = x_k \in R$

$= y$

2. Karena $1 \in R$ dan $R = \{a \cdot x_1, a \cdot x_2, \dots, a \cdot x_n\}$ maka ada $1 = a \cdot x_m$ untuksuatu $m \in \{1,2,\dots,n\}$

   Ini berarti $a^{-1} = x_m$

DEFINISI 25

Misalkan $(R, +, \cdot)$ suatu daerah integral, $a \in R$ *dan* $m \in \mathbb{N}$.

1. m.a didefinisikan sebagai a+a+...+a (penjumlahan m buah a)
2. R dikatakan mempunyai **karakteristik nol** jika setiap $a \in R$ relasi $m \cdot a = 0$ hanya dipenuhi oleh $m = 0$.

DEFINISI 26

Misalkan $(R, +, \cdot)$ suatu daerah integral.

R dikatakan mempunyai **karakteristik hingga** jika $a \in R$ ada $m \in \mathbb{N}$ sehingga

$m \cdot a = 0$

CONTOH

$\mathbb{Z}_5 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\}$ suatu daerah integral

Apakah $\forall a \in \mathbb{Z}_5$ terdapat $m \in \mathbb{Z}^+$ sehingga $m.a = 0$?

JAWAB :

Kita jumlahkan tiap angka dari 0,1,2,3, dan 4

Jika hasilnya adalah kelipatan 5 maka hasilnya adalah 0, berikutnya jika hasilnya kelipatan 6 = 2, kelipatan 7 = 3 dan seterusnya

- $\bar{0} + \bar{0} = \bar{0}$

  $\bar{0} + \bar{0} + \bar{0} = \bar{0}$

  $\bar{0} + \bar{0} + \bar{0} + \bar{0} = \bar{0}$

  $\bar{0} + \bar{0} + \bar{0} + \bar{0} + \bar{0} = \bar{0}$ $\quad\rightarrow m = 5$
- $\bar{1} + \bar{1} = \bar{2}$

  $\bar{1} + \bar{1} + \bar{1} = \bar{3}$

  $\bar{1} + \bar{1} + \bar{1} + \bar{1} = \bar{4}$

  $\bar{1} + \bar{1} + \bar{1} + \bar{1} + \bar{1} = \bar{5}$ $\quad\rightarrow m = 5$
- $\bar{2} + \bar{2} = \bar{4}$

  $\bar{2} + \bar{2} + \bar{2} = \bar{1}$

  $\bar{2} + \bar{2} + \bar{2} + \bar{2} = \bar{3}$

  $\bar{2} + \bar{2} + \bar{2} + \bar{2} + \bar{2} = \bar{2}$ $\quad\rightarrow m = 5$
- $\bar{3} + \bar{3} = \bar{1}$

  $\bar{3} + \bar{3} + \bar{3} = \bar{4}$

  $\bar{3} + \bar{3} + \bar{3} + \bar{3} = \bar{2}$

$\bar{3} + \bar{3} + \bar{3} + \bar{3} = \bar{0}$ $\rightarrow m = 5$

- $\bar{4} + \bar{4} = \bar{3}$

  $\bar{4} + \bar{4} + \bar{4} = \bar{2}$

  $\bar{4} + \bar{4} + \bar{4} + \bar{4} = \bar{1}$

  $\bar{4} + \bar{4} + \bar{4} + \bar{4} + \bar{4} = \bar{0}$ $\rightarrow m = 5$

$\therefore$ $\mathbb{Z}_5$ mempunyai karakteristik hinggan dengan $m = 5$

CONTOH

Misalkan $(R, +, \cdot)$ suatu ring .

Buktikan bahwa jika $a, b \in R$ dan $m, n \in \mathbb{N}$ maka $(na)(mb) = (nm)(ab)$

JAWAB :

Misalkan $(R, +, \cdot)$ suatu ring .

Adt bahwa jika $a, b \in R$ dan $m, n \in \mathbb{Z}$ maka $(na)(mb) = (nm)(ab)$.Ambil a, $b \in R$ dan $m, n \in \mathbb{N}$.

Adt $(na)(mb) = (nm)(ab)$.

Perhatikan bahwa :

$$(na)(mb) = (a + a + \cdots + a)(b + b + \cdots + b)$$

$$n \qquad\qquad m$$

$$= a(b + b + \cdots + b) + a(b + b + \cdots + b) + \cdots + a(b + b + \cdots + b)$$

$$1 \qquad\qquad 2 \qquad\qquad n$$

$$= (ab + ab + \cdots + ab) + (ab + ab + \cdots + ab) + \cdots + (ab + ab + ab)$$

$$= (nm)(ab)$$

Definisi 27

Misalkan $(R_1, +_1, \cdot_1)$, $(R_2, +_2, \cdot_2)$ suatu ring dan φ suatu pemetaan dari R_1 ke R_2. φ disebut **homomorfisma ring** jika :

1. Setiap $a, b \in R_1$ berlaku $\varphi(a +_1 b) = \varphi(a) +_2 \varphi(b)$
2. Setiap $a, b \in R_1$ berlaku $\varphi(a \cdot_1 b) = \varphi(a) \cdot_2 \varphi(b)$

Lemma 3.3.1

Misalkan $(R_1, +_1, \cdot_1)$, $(R_2, +_2, \cdot_2)$ suatu ring dan φ suatu pemetaan homomorfisma ring dari R_1 ke R_2 maka :

1. $\varphi(0_1) = 0_2$
2. Setiap $a \in R_1$ berlaku $\varphi(-a) = -(\varphi(a))$

Bukti :

Misalkan $(R_1, +_1, \cdot_1)$, $(R_2, +_2, \cdot_2)$ suatu ring dan φ suatu pemetaan homomorfisma ring dari R_1 ke R_2. Adt :

1. $\varphi(0_1) = 0_2$
2. Setiap $a \in R_1$ berlaku $\varphi(-a) = -(\varphi(a))$

Pandang $(R_1, +_1)$, $(R_2, +_2)$ suatu group dengan unsur identitas masing-masing 0_1 dan 0_2, dan φ suatu homomorfisma group dari R_1 ke R_2.

Perhatikan bahwa :

1. $\varphi(0_1) = \varphi(0_1 +_1 0_1)$
   $\varphi(0_1) = \varphi(0_1) +_2 \varphi(0_1)$
   Kita pisahkan dengan menggunakan sifat distributif
   $-(\varphi(0_1)) +_2 \varphi(0_1) = -(\varphi(0_1)) +_2 (\varphi(0_1) +_2 \varphi(0_1))$
   Kita tambahkan negatif (-) di ruas kanan dan kiri
   $0_2 = \varphi(0_1)$
2. Ambil $a \in R_1$
   Perhatikan bahwa :
   $\varphi(0_1) = \varphi(a +_1 - a)$

   $0_2 = \varphi(a) +_2 \varphi(-a)$
   Kita pisahkan dengan menggunakan sifat distributif
   $-(\varphi(a)) +_2 0_2 = -(\varphi(a)) +_2 (\varphi(a) +_2 \varphi(-a))$
   Kita tambahkan negatif (-) di ruas kanan dan kiri
   $-(\varphi(a)) = \varphi(-a)$

Definisi 28

Misalkan $(R_1, +_1, \cdot_1)$, $(R_2, +_2, \cdot_2)$ suatu ring dan φ suatu pemetaan homomorfisma ring dari R_1 ke R_2.

Himpunan $\{a \in R_1 | \varphi(a) = 0_2\}$ disebut **kernel** dari φ yang ditulis sebagai $I(\varphi)$.

Lemma 3.3.2

Misalkan $(R_1, +_1, \cdot_1)$, $(R_2, +_2, \cdot_2)$ suatu ring dan φ suatu pemetaan homomorfisma ring dari R_1 ke R_2 maka :

1. $I(\varphi)$ subgroup dari $(R_1, +_1, \cdot_1)$
2. Setiap $a \in I(\varphi)$ dan $r \in R_1$ berlaku :

(i) $a \cdot_1 r \in I(\varphi)$

(ii) $r \cdot_1 a \in I(\varphi)$

BUKTI :

Misalkan $(R_1, +_1, \cdot_1)$, $(R_2, +_2, \cdot_2)$ suatu ring dan φ suatu pemetaan homomorfisma ring dari R_1 ke R_2. Adt :

1. $I(\varphi)$ subgroup dari $(R_1, +_1, \cdot_1)$
2. Setiap $a \in I(\varphi)$ dan $r \in R_1$ berlaku :
   (iii) $a \cdot_1 r \in I(\varphi)$
   (iv) $r \cdot_1 a \in I(\varphi)$

1. a. Karena $0_1 \in R_1$ dan $\varphi(0_1) = 0_2$ maka $0_1 \in I(\varphi)$

   $\therefore I(\varphi) \neq \emptyset$

   b. Karena $I(\varphi) = \{a \in R_1 | \varphi(a) = 0_2\}$ maka $I(\varphi) \subseteq R_1$

   $\therefore I(\varphi) \subseteq R_1$

   c. Ambil $a, b \in I(\varphi)$. Adt $a +_1 b \in I(\varphi)$

   Karena $a, b \in I(\varphi)$ dan $I(\varphi) = \{a \in R_1 | \varphi(a) = 0_2\}$ maka $a, b \in R_1$ dan $\varphi(a) = 0_2, \varphi(b) = 0_2$

   Karena $a, b \in R_1$ dan$(R_1, +_1, \cdot_1)$ suatu ring maka $a +_1 b \in R_1$

   Perhatikan bahwa :

   $$\begin{aligned} \varphi(a +_1 b) &= \varphi(a) +_2 \varphi(b) \\ &= 0_2 +_2 0_2 \\ &= 0_2 \end{aligned}$$

   Karena $a +_1 b \in R_1$ dan $\varphi(a +_1 b) = 0_2$ maka $a +_1 b \in I(\varphi)$

   d. Ambil $a \in I(\varphi)$. Adt $-a \in I(\varphi)$

   Karena $a \in I(\varphi)$ dan $I(\varphi) = \{a \in R_1 | \varphi(a) = 0_2\}$ maka $a \in R_1$ dan $\varphi(a) = 0_2$

   Karena $a \in R_1$ dan$(R_1, +_1, \cdot_1)$ suatu ring maka $-a \in R_1$

   Perhatikan bahwa :

   $$\begin{aligned} \varphi(-a) &= -(\varphi(a)) \\ &= -0_2 \\ &= 0_2 \end{aligned}$$

   Karena $-a \in R_1$ dan $\varphi(-a) = 0_2$ maka $-a \in I(\varphi)$

   Karena a, b, c, d maka $I(\varphi)$ subgroup dari R_1

2. **(i)**. Ambil $a \in I(\varphi)$ dan $r \in R_1$. Adt $a \cdot_1 r \in I(\varphi)$

   Karena $a \in I(\varphi)$ dan $I(\varphi) = \{a \in R_1 | \varphi(a) = 0_2\}$ maka $a \in R_1$ dan $\varphi(a) = 0_2$

   Karena $a, r \in R_1$ dan$(R_1, +_1, \cdot_1)$ suatu ring maka $a \cdot_1 r \in R_1$

   Perhatikan bahwa :

   $\varphi(a \cdot_1 r) = \varphi(a) \cdot_2 \varphi(r)$ { φ homomorfisma ring}

$= 0_2 \cdot_2 \varphi(r)$

$= 0_2$ {Lemma 3.2.1 (i)}

Karena $a \cdot_1 r \in R_1$ dan $\varphi(a \cdot_1 r) = 0_2$ maka $r \cdot_1 a \in I(\varphi)$

(ii). Ambil $a \in I(\varphi)$ dan $r \in R_1$. Adt $a \cdot_1 r \in I(\varphi)$

Karena $a \in I(\varphi)$ dan $I(\varphi) = \{a \in R_1 | \varphi(a) = 0_2\}$ maka $a \in R_1$ dan $\varphi(a) = 0_2$

Karena $a, r \in R_1$ dan$(R_1, +_1, \cdot_1)$ suatu ring maka $r \cdot_1 a \in R_1$

Perhatikan bahwa :

$\varphi(r \cdot_1 a) = \varphi(r) \cdot_2 \varphi(a)$ { φ homomorfisma ring}

$= \varphi(r) \cdot_2 0_2$

$= 0_2$ {Lemma 3.2.1 (i)}

Karena $r \cdot_1 a \in R_1$ dan $\varphi(r \cdot_1 a) = 0_2$ maka $r \cdot_1 a \in I(\varphi)$

Contoh 1

$(\mathbb{C}, +, \cdot)$ suatu lapangan

$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{R}\}$

Setiap $\bar{a} = (x_1, y_1)$, $\bar{b} = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ definisikan operasi $+$ dan $\cdot$ sebagai berikut :

(i) $\bar{a} + \bar{b} = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$

(ii) $\bar{a} \cdot \bar{b} = (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2,\ x_1y_2 + y_1x_2)$

1. Tunjukkan bahwa $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ suatu lapangan.
2. Buat pemetaan $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{R}^2$

   $a + bi \to (a, b)$

Periksa apakah φ suatu homomorfisma ring?

Jawab :

1. Adt $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ suatu lapangan
   a. Ambil $\bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{R}^2$. Adt $\bar{a} + \bar{b} \in \mathbb{R}^2$

      Karena $\bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{R}^2$ dan $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{R}\}$ maka $\bar{a} = (x_1, y_1), \bar{b} = (x_2, y_2)$ untuk suatu $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$

      Perhatikan bahwa :

      $$\bar{a} + \bar{b} = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

      Karena $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ maka $x_1 + x_2, y_1 + y_2 \in \mathbb{R}$

      Kita pindahkan x dengan x, y dengan y

      Akibatnya $\bar{a} + \bar{b} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \in \mathbb{R}^2$
   b. Ambil $\bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{R}^2$. Adt. $\bar{a} + \bar{b} = \bar{b} + \bar{a}$

      Karena $\bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{R}^2$ dan $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{R}\}$ maka $\bar{a} = (x_1, y_1), \bar{b} = (x_2, y_2)$ untuk suatu $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$

Perhatikan bahwa :

$$\bar{a}+\bar{b}= (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$
$$\bar{b}+ \bar{a}= (x_2, y_2) + (x_1, y_1) = (x_2 + x_1, y_2 + y_1)$$

Kita pindahkan x dengan x, y dengan y

Karena $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ maka berlaku

$$x_1 + x_2 = x_2 + x_1, y_1 + y_2 = y_2 + y_1$$

Akibatnya, $\bar{b}+ \bar{a}= (x_2 + x_1, y_2 + y_1) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) = \bar{a}+ \bar{b}$

c. Ambil $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in \mathbb{R}^2$. Adt. $\bar{a}+ (\bar{b}+ \bar{c}) = (\bar{a}+\bar{b}) + \bar{c}$

Karena $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in \mathbb{R}^2$ dan $\mathbb{R}^2 = \{(x, y)|x, y \in \mathbb{R}\}$ maka $\bar{a}= (x_1, y_1), \bar{b}= (x_2, y_2),\ \bar{c} = (x_3, y_3)$ untuk suatu $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{R}$

Perhatikan bahwa :

$$\bar{a}+ (\bar{b} + \bar{c}) = (x_1, y_1) + ((x_2, y_2) + (x_3, y_3))$$
$$= (x_1, y_1) + (x_2 + x_3, y_2 + y_3)$$

Kita pindahkan x dan x, y dan y kemudian kelompokkan didalam kurung

$$= (x_1 + (x_2 + x_3), y_1 + (y_2 + y_3))$$
$$= ((x_1 + x_2) + x_3, (y_1 + y_2) + y_3)$$
$$= (x_1 + x_2, y_1 + y_2) + (x_3, y_3)$$

Gabungkan dengan menggunakan sifat asosiatif

$$= ((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) + (x_3, y_3)$$
$$= (\bar{a}+\bar{b}) +\bar{c}$$

d. Ambil $\bar{a}\in \mathbb{R}^2$. Adt. ada $\bar{0}\in \mathbb{R}^2$ sehingga berlaku $\bar{a}+ 0 = \bar{a}$

Karena $\bar{a}\in \mathbb{R}^2$ dan $\mathbb{R}^2 = \{(x, y)|x, y \in \mathbb{R}\}$ maka $\bar{a}= (x_1, y_1)$, untuk suatu $x_1, y_1 \in \mathbb{R}$

Pilih $\bar{0}= (0,0)$

Perhatikan bahwa :

$$\begin{aligned} \bar{a}+ \bar{0} &= (x_1, y_1) + (0,0) \\ &= (x_1 + 0, y_1 + 0) \\ &= (x_1, y_1) \\ &= \bar{a} \end{aligned}$$

e. Ambil $\bar{a}\in \mathbb{R}^2$. Adt ada $-\bar{a}\in \mathbb{R}^2$ sehingga berlaku $\bar{a}+ (-\bar{a}) = \bar{0}$

Karena $\bar{a}\in \mathbb{R}^2$ dan $\mathbb{R}^2 = \{(x, y)|x, y \in \mathbb{R}\}$ maka $\bar{a}= (x_1, y_1)$, untuk suatu $x_1, y_1 \in \mathbb{R}$

Pilih $-\bar{a}= (-x_1, -y_1)$

Perhatikan bahwa :

$$\begin{aligned} \bar{a}+ (-\bar{a}) &= (x_1, y_1) + (-x_1, -y_1) \\ &= (x_1 + -x_1, y_1 + -y_1) \end{aligned}$$

$= (0,0)$
$= \overline{0}$

f. Ambil $\bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{R}^2$. Adt $\bar{a} \cdot \bar{b} \in \mathbb{R}^2$
Karena $\bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{R}^2$ dan $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{R}\}$ maka
$\bar{a} = (x_1, y_1), \bar{b} = (x_2, y_2)$ untuk suatu $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$
Perhatikan bahwa :

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = (x_1, y_1).(x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2,\ x_1y_2 + y_1x_2)$$

Karena $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ maka $x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + y_1x_2 \in \mathbb{R}$
Akibatnya, $\bar{a} \cdot \bar{b} = (x_1x_2 - y_1y_2,\ x_1y_2 + y_1x_2) \in \mathbb{R}^2$

g. Ambil $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in \mathbb{R}^2$. Adt $\bar{a} \cdot (\bar{b} \cdot \bar{c}) = (\bar{a} \cdot \bar{b}) \cdot \bar{c}$
Karena $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in \mathbb{R}^2$ dan $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) |\ x, y \in \mathbb{R}\}$ maka
$\bar{a} = (x_1, y_1), \bar{b} = (x_2, y_2), \bar{c} = (x_3, y_3)$
untuk suatu $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{R}$
Perhatikan bahwa :

(i) $$\begin{aligned}\bar{a} \cdot (\bar{b} \cdot \bar{c}) &= (x_1, y_1) \cdot ((x_2, y_2) \cdot (x_3, y_3)) \\ &= (x_1, y_1) \cdot (x_2x_3 - y_2y_3, x_2y_3 + y_2x_3) \\ &= (x_1(x_2x_3 - y_2y_3) \\ &\qquad - y_1(x_2y_3 + y_2x_3), x_1(x_2y_3 + y_2x_3) \\ &\qquad + y_1(x_2x_3 - y_2y_3)) \\ &= ((x_1x_2x_3 - x_1y_2y_3) \\ &\qquad - (y_1x_2y_3 + y_1y_2x_3), (x_1x_2y_3 \\ &\qquad + x_1y_2x_3) + (y_1x_2x_3 - y_1y_2y_3)) \\ &= (x_1x_2x_3 - x_1y_2y_3 - y_1x_2y_3 - y_1y_2x_3, x_1x_2y_3 \\ &\qquad + x_1y_2x_3 + y_1x_2x_3 - y_1y_2y_3)\end{aligned}$$

(ii) $$\begin{aligned}(\bar{a} \cdot \bar{b}) \cdot \bar{c} &= ((x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2)) \cdot (x_3, y_3) \\ &= (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + y_1x_2) \cdot (x_3, y_3) \\ &= ((x_1x_2 - y_1y_2)x_3 \\ &\qquad - (x_1y_2 + y_1x_2)y_3, (x_1x_2 - y_1y_2)y_3 \\ &\qquad + (x_1y_2 + y_1x_2)x_3) \\ &= ((x_1x_2x_3 - y_1y_2x_3) \\ &\qquad - (x_1y_2y_3 + y_1x_2y_3), (x_1x_2y_3 \\ &\qquad - y_1y_2y_3) + (x_1y_2x_3 + y_1x_2x_3)) \\ &= (x_1x_2x_3 - y_1y_2x_3 - x_1y_2y_3 - y_1x_2y_3, x_1x_2y_3 \\ &\qquad - y_1y_2y_3 + x_1y_2x_3 + y_1x_2x_3) \\ &= (x_1x_2x_3 - x_1y_2y_3 - y_1x_2y_3 - y_1y_2x_3, x_1x_2y_3 \\ &\qquad + x_1y_2x_3 + y_1x_2x_3 - y_1y_2y_3)\end{aligned}$$

Dari (i) dan (ii) diperoleh $\bar{a} \cdot (\bar{b} \cdot \bar{c} \ = (\bar{a} \cdot \bar{b}) \cdot \bar{c}$

h. Ambil $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in \mathbb{R}^2$. Adt :

$$(i). \bar{a} \cdot (\bar{b} + \bar{c}) = \bar{a} \cdot \bar{b} + \bar{a} \cdot c$$

$$(ii). (\bar{b} + c \quad \cdot \bar{a} = \bar{b} \cdot \bar{a} + \bar{c} \cdot \bar{a}$$

Karena $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in \mathbb{R}^2$ dan $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{R}\}$ maka $\bar{a} = (x_1, y_1), \bar{b} = (x_2, y_2), \bar{c} = (x_3, y_3)$ untuk suatu $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{R}$

Perhatikan bahwa :

(i) $\bar{a} \cdot (\bar{b} + \bar{c}) = (x_1, y_1) \cdot ((x_2, y_2) + (x_3, y_3))$

$= (x_1, y_1) \cdot (x_2 + x_3, y_2 + y_3)$

$= (x_1(x_2 + x_3) - y_1(y_2 + y_3), x_1(y_2 + y_3) + y_1(x_2 + x_3))$

$= (x_1x_2 + x_1x_3 - y_1y_2 - y_1y_3, x_1y_2 + x_1y_3 + y_1x_2 + y_1x_3)$

$\bar{a} \cdot \bar{b} + \bar{a} \cdot \bar{c} = ((x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2)) + ((x_1, y_1) \cdot (x_3, y_3))$

$= (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + y_1x_2) + (x_1x_3 - y_1y_3, x_1y_3 + y_1x_3)$

$= (x_1x_2 - y_1y_2 + x_1x_3 - y_1y_3, x_1y_2 + y_1x_2 + x_1y_3 + y_1x_3)$

$= (x_1x_2 + x_1x_3 - y_1y_2 - y_1y_3, x_1y_2 + x_1y_3 + y_1x_2 + y_1x_3)$

Diperoleh $\bar{a} \cdot (\bar{b} + c \quad = \bar{a} \cdot \bar{b} + \bar{a} \cdot \bar{c}$

(ii). $(\bar{b} + c \quad \cdot \bar{a} = ((x_2, y_2) + (x_3, y_3)) \cdot (x_1, y_1)$

$= (x_2 + x_3, y_2 + y_3) \cdot (x_1, y_1)$

$= ((x_2 + x_3)x_1 - (y_2 + y_3)y_1, (x_2 + x_3)y_1 + (y_2 + y_3)x_1)$

$= (x_2x_1 + x_3x_1 - y_2y_1 - y_3y_1, x_2y_1 + x_3y_1 + y_2x_1 + y_3x_1)$

$\bar{b} \cdot \bar{a} + \bar{c} \cdot \bar{a} = ((x_2, y_2) \cdot (x_1, y_1)) + ((x_3, y_3) \cdot (x_1, y_1))$

$= (x_2x_1 - y_2y_1, x_2y_1 + y_2x_1) + (x_3x_1 - y_3y_1, x_3y_1 + y_3x_1)$

$= (x_2x_1 - y_2y_1 + x_3x_1 - y_3y_1, x_2y_1 + y_2x_1 + x_3y_1 + y_3x_1)$

$= (x_2x_1 + x_3x_1 - y_2y_1 - y_3y_1, x_2y_1 + x_3y_1 + y_2x_1 + y_3x_1)$

Diperoleh $(\bar{b} + \bar{c} \quad \cdot \bar{a} = \bar{b} \cdot \bar{a} + \bar{c} \cdot \bar{a}$

i. Ambil $\bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{R}^2$. Adt $\bar{a} \cdot \bar{b} \cdot = \bar{b} \cdot \bar{a}$

Karena $\bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{R}^2$ dan $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{R}\}$ maka $\bar{a} = (x_1, y_1), \bar{b} = (x_2, y_2)$ untuk suatu $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$

Perhatikan bahwa :

$\bar{a} \cdot \bar{b} = (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + y_1x_2)$

$\bar{b} \cdot \bar{a} = (x_2, y_2) \cdot (x_1, y_1) = (x_2x_1 - y_2y_1, x_2y_1 + y_2x_1)$

Karena $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ maka berlaku

$x_1x_2 - y_1y_2 = x_2x_1 - y_2y_1, x_1y_2 + y_1x_2 = x_2y_1 + y_2x_1$
Akibatnya,
$\bar{b} \cdot \bar{a} = (x_2x_1 - y_2y_1, x_2y_1 + y_2x_1) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + y_1x_2)$
$= \bar{a} \cdot \bar{b}$

j. Ambil $\bar{a} \in \mathbb{R}^2$. Adt ada $\bar{1} \in \mathbb{R}^2$ sehingga berlaku $\bar{a} \cdot \bar{1} = \bar{a}$
Karena $\bar{a} \in \mathbb{R}^2$ dan $\mathbb{R}^2 = \{(x,y) | x, y \in \mathbb{R}\}$ maka $\bar{a} = (x_1, y_1)$, untuk suatu $x_1, y_1 \in \mathbb{R}$
Pilih $\bar{1} = (1,0) \in \mathbb{R}^2$
Perhatikan bahwa :
$\bar{a} \cdot \bar{1} = (x_1, y_1) \cdot (1.0)$
$= (x_1 \cdot 1 - y_1 \cdot 0, x_1 \cdot 0 + y_1 \cdot 1)$
$= (x_1, y_1)$
$= \bar{a}$

k. Ambil $\bar{a} \in \mathbb{R}^2$ dengan $\bar{a} \neq (0,0)$. Adt ada $\bar{a}^{-1} \in \mathbb{R}^2$ sehingga berlaku $\bar{a} \cdot \bar{a}^{-1} = (1,0)$
Karena $\bar{a} \in \mathbb{R}^2$ dan $\mathbb{R}^2 = \{(x,y) | x, y \in \mathbb{R}\}$ maka $\bar{a} = (x_1, y_1)$, untuk suatu $x_1, y_1 \in \mathbb{R}$
Karena $\bar{a} \neq (0,0)$ maka $x_1 \neq 0 \; atau \; y_1 \neq 0$

Pilih $\bar{a}^1 = \left(\frac{x_1}{x_1^2+y_1^2}, \frac{y_1}{x_1^2+y_1^2}\right) \in \mathbb{R}^2$

$\bar{a} \cdot \bar{a}^{-1} = (x_1, y_1) \cdot \left(\frac{x_1}{x_1^2+y_1^2}, \frac{-y_1}{x_1^2+y_1^2}\right)$

$= \left(x_1 \cdot \frac{x_1}{x_1^2+y_1^2} - y_1 \cdot \frac{-y_1}{x_1^2+y_1^2}, x_1 \cdot \frac{x_1}{x_1^2+y_1^2} + y_1 \cdot \frac{-y_1}{x_1^2+y_1^2}\right)$

$= \left(\frac{x_1^2}{x_1^2+y_1^2}, \frac{y_1^2}{x_1^2+y_1^2}, \frac{-x_1y_1}{x_1^2+y_1^2}, \frac{x_1y_1}{x_1^2+y_1^2}\right)$

$= \left(\frac{x_1^2+y_1^2}{x_1^2+y_1^2}, \frac{-x_1y_1 + x_1y_1}{x_1^2+y_1^2}\right) = (1,0)$

Karena $a, b, c, \cdots, k$ maka $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ suatu lapangan.

2. Adt bahwa φ suatu homomorfisma ring

(i). Ambil $\bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{C}$. Adt $\varphi(\bar{a} + \bar{b}) = \varphi(\bar{a}) + \varphi(\bar{a})$

Karena $\bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{C}$ dan $\mathbb{C} = \{a + bi | a, b \in \mathbb{R}\}$ maka
$\bar{a} = a_1 + b_1i, \bar{b} = a_2 + b_2i$ untuk suatu $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$
Perhatikan bahwa :
$\bar{a} + \bar{b} = (a_1 + b_1i) + (a_2 + b_2i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$
$\varphi(\bar{a} + \bar{b}) = \varphi((a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$

$\varphi(\bar{a}) = \varphi(a_1 + b_1 i) = (a_1, b_1)$

$\varphi(\bar{b}) = \varphi(a_2 + b_2 i) = (a_2, b_2)$

$\varphi(\bar{a}) + \varphi(\bar{b}) = (a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$

Diperoleh $\varphi(\bar{a} + \bar{b}) = \varphi(\bar{a}) + \varphi(\bar{b})$

(ii). Ambil $\bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{C}$. Adt $\varphi(\bar{a} \cdot \bar{b}) = \varphi(\bar{a}) \cdot \varphi(\bar{b})$

Karena

$\bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{C}$ dan $\mathbb{C} = \{a + bi | a, b \in \mathbb{R}\}$ maka

$\bar{a} = a_1 + b_1 i, \bar{b} = a_2 + b_2 i$ untuk suatu $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$

Perhatikan bahwa :

$\bar{a} \cdot \bar{b} = (a_1 + b_1 i) \cdot (a_2 + b_2 i) = a_1 a_2 + a_1 b_2 i + b_1 a_2 i - b_1 b_2$

$= (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + b_1 a_2) i$

$\varphi(\bar{a} \cdot \bar{b}) = \varphi((a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + b_1 a_2) i)$

$= (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + b_1 a_2)$

$\varphi(\bar{a}) = \varphi(a_1 + b_1 i) = (a_1, b_1)$

$\varphi(\bar{b}) = \varphi(a_2 + b_2 i) = (a_2, b_2)$

$\varphi(\bar{a}) \cdot \varphi(\bar{b}) = (a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + b_1 a_2)$

Diperoleh $\varphi(\bar{a} \cdot \bar{b}) = \varphi(\bar{a}) \cdot \varphi(\bar{b})$

Karena (i) dan (ii) maka φ suatu homomorfisma ring

Definisi 29

Misalkan $(R_1, +_1, \cdot_1), (R_2, +_2, \cdot_2)$ suatu ring dan φ suatu fungsi dari R_1 ke R_2.

1. ? disebut **isomorfisma ring** jika :
   a. φ suatu homomorfisma ring
   b. φ : satu-satu
   c. φ : pada

2. Ring R_1 disebut **isomorfik** dengan R_2 yang dituliskan sebagai berikut:
   $R_1 \approx R_2$ jika ada suatu isomorfisma φ dari R_1 ke R_2 atau sebaliknya.

   Keterangan:
   $\approx$: isomorfik
   $\mathbb{C}$: bilangan
   $\mathbb{R}^2$: Jumlah bilangan

Contoh 2

$(\mathbb{C}, +, \cdot)$ suatu ring

$(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ suatu ring

$\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{R}^2$

$a + bi \to (a, b)$

Adt φ suatu isomorfisma ring.

1. Adt φ suatu homomorfisma ring

   (i).Ambil $x, y \in \mathbb{C}$. Adt $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$ (menggunakan sifat distributif)

   Karena $x, y \in \mathbb{C}$ dan $\mathbb{C} = \{a + bi | a, b \in \mathbb{R}\}$ maka
   $x = a_1 + b_1 i, y = a_2 + b_2 i$ untuk suatu himpunan (x , y) ; $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$
   $x + y = (a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$ (menggunakan sifat asosiatif)
   Perhatikan bahwa :
   $\varphi(x + y) = \varphi((a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i)$ (menggunakan Definisi 22)
   $= (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$
   $= (a_1, b_1) + (a_2, b_2)$ (menggunakan sifat asosiatif)
   $= \varphi(a_1 + b_1 i) + \varphi(a_2 + b_2 i)$
   $= \varphi(x)+ \varphi(y)$

(ii). Ambil $x, y \in \mathbb{C}$. Adt $\varphi(x \cdot y) = \varphi(x) \cdot \varphi(y)$ (menggunakan sifat distrubutif)

Karena $x, y \in \mathbb{C}$ dan $\mathbb{C} = \{a + bi | a, b \in \mathbb{R}\}$ maka
$x = a_1 +$
$b_1 i, y = a_2 + b_2 i$ untuk suatu $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$
$x \cdot y = (a_1 + b_1 i) \cdot (a_2 + b_2 i)$
$= a_1 a_2 + a_1 b_2 i + a_2 b_1 i - b_1 b_2$ (menggunakan definisi 22)
$= (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) i$
Perhatikan bahwa :
$\varphi(x \cdot y) = \varphi((a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) i)$
$= (\square_1\square_2 - \square_1\square_2, \square_1\square_2 + \square_2\square_1)$
$= (a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2)$
$= \varphi(a_1 + b_1 i) \cdot \varphi(a_2 + b_2 i)$ (menggunakan definisi 22)
$= \varphi(x) \cdot \varphi(y)$
Karena (i) dan (ii) terbukti bahwa φ suatu homomorfisma ring

2. Ambil$x, y \in \mathbb{C}$ dengan $\varphi(x) = \varphi(y)$. Adt $x = y$
   Karena $x, y \in \mathbb{C}$ dan $\mathbb{C} = \{a + bi | a, b \in \mathbb{R}\}$ maka
   $x = a_1 + b_1 i, y = a_2 + b_2 i$ untuk suatu himpunan (x,y) $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$
   Perhatikan bahwa :
   $\varphi(x) = \varphi(y)$
   $\varphi(a_1 + b_1 i) = \varphi(a_2 + b_2 i)$
   $(a_1, b_1 i) = (a_2, b_2 i)$

   Karena $(a_1, b_1 i) = (a_2, b_2 i)$ maka $a_1 = a_2$ dan $b_1 i = b_2 i$
   Akibatnya, $x = a_1 + b_1 i = a_2 + b_2 i = y$
   Kesimpulannya, terbukti nilai φ : satu - satu

3. Ambil $y \in \mathbb{R}^2$. Adt ada $x \in \mathbb{C}$ sehingga $y = \varphi(x)$
   Karena $y \in \mathbb{R}^2$ dan $\mathbb{R}^2 = \{(a, b) | a, b \in \mathbb{R}\}$ maka $y = (a_1, b_1)$
   untuk suatu anggota $a_1, b_1 \in \mathbb{R}$
   Pilih $x = a_1 + b_1 i$ maka :
   $\varphi(x) = \varphi(a_1 + b_1 i) = (a_1, b_1) = y$
   Kesimpulannya terbukti φ : pada

Karena 1,2,3 maka φ suatu isomorfisma ring.

Karena ada suatu pemetaan isomorfisma ring $\varphi\ dari$ $\mathbb{C}$ ke $\mathbb{R}^2$ maka $\mathbb{C} \approx \mathbb{R}^2$

Lemma 3.3.3

Misalkan$(R_1, +_1, \cdot_1)$, $(R_2, +_2, \cdot_2)$ suatu ring dan φ suatu pemetaan homomorfisma ring dari R_1 ke R_2.

$$\varphi \text{ :satu-satu} \leftrightarrow I(\varphi) = \{0_1\}$$

BUKTI :

Misalkan$(R_1, +_1, \cdot_1)$, $(R_2, +_2, \cdot_2)$ suatu ring dan φ suatu pemetaan homomorfisma ring dari R_1 ke R_2.

Adt φ :satu-satu $\leftrightarrow I(\varphi) = \{0_1\}$

Pandang group $(R_1, +_1), (R_2, +_2)$ dan φ suatu pemetaan homomorfisma group dari R_1 ke R_2.

$(\rightarrow)$ Misalkan φ : satu-satu. Adt $I(\varphi) = \{0_1\}$ yaitu dengan menunjukkan $I(\varphi) \subseteq \{0_1\}$ dan $\{0_1\} \subseteq I(\varphi)$

1. Ambil $x \in I(\varphi)$. Adt $x \in \{0_1\}$ yaitu dengan menunjukkan $x = 0_1$
   Perhatikan bahwa :
   $\varphi(0_1) = 0_2$
   Karena $x \in I(\varphi)$ maka $\varphi(x) = 0_2$
   Karena $\varphi(0_1) = \varphi(x)$ dan φ satu-satu maka $0_1 = x$

2. Karena $\varphi(0_1) = 0_2$ maka $0_1 \in I(\varphi)$
   Karena $0_1 \in I(\varphi)$ maka $\{0_1\} \subseteq I(\varphi)\backslash$

$(\leftarrow)$ Misalkan $I(\varphi) = \{0_1\}$. Adt φ :satu-satu yaitu dengan menunjukkan setiap $x, y \in R_1$ dengan $\varphi(x) = \varphi(y)$ berlaku $x = y$

Ambil $x, y \in R_1$ dengan $\varphi(x) = \varphi(y)$. Adt $x = y$

Perhatikan bahwa :

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \varphi(y) \\ \varphi(x) +_2 (-(\varphi(y))) &= \varphi(y) +_2 (-(\varphi(y))) \\ \varphi(x) +_2 \varphi(-y) &= 0_2 \end{aligned}$$

$$\varphi(x +_1 (-y)) \qquad = 0_2$$

Inin berarti, $x +_1 (-y) \in I(\varphi)$

Karena $x +_1 (-y) \in I(\varphi)$ dan $I(\varphi) = \{0_1\}$ maka $x +_1 (-y) = 0_1$ atau $x = y$

Contoh 3

Adt $\varphi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^2$ satu-satu

$a + bi \rightarrow (a, b)$

Dengan menggunakan lemma 3.3.3

$I(\varphi) = \{a \in R_1 | \varphi(a) = 0_2\}$

$= \{x \in \mathbb{C} | \varphi(x) = (0,0)\}$

$= \{a + bi \in \mathbb{C} | \varphi(a + bi) = (0,0)\}$

$= \{a + bi \in \mathbb{C} | (a, b) = (0,0)\}$

$= \{a + bi \in \mathbb{C} | a = 0, b = 0\}$

$= \{0 + 0i\}$

$= \{0_1\}$

$\therefore\ \varphi : satu\ satu$

Definisi 30

Misalkan $(R, +, \cdot)$ suatu ring dan $U \subseteq R, U \neq 0$.

U disebut ideal dari R jika :

1. U subgroup dari $(R, +)$
2. Setiap $u \in U$ dan $r \in R$ berlaku :
   a. $u \cdot r \in U$
   b. $r \cdot u \in U$

Contoh 4 (soal no. 4 halaman 135)

Misalkan $(R, +, \cdot)$ suatu ring komutatif dan $a \in R$

Tulis $R \cdot a = \{r.a | r \in R\}$. Periksa apakah $R \cdot a$ suatu ideal dari R

1. Ambil $x \in R \cdot a$. Adt $x \in R$

Karena $x \in R \cdot a$ dan $R \cdot a = \{r.a | r \in R\}$ maka $x = r_1 \cdot a$ untuk suatu $r_1 \in R$

Karena $a, r_1 \in R$ dan R suatu ring maka $r_1 \cdot a \in R$ atau $x \in R$

$$\therefore R \cdot a \subseteq R$$

2. Karena $0 \in R$ dan $0.a = 0$ maka $0 \in R \cdot a$

$$\therefore R \cdot a \neq \emptyset$$

3. Ambil $x, y \in R \cdot a$. Adt $x + y \in R \cdot a$

Karena $x, y \in R \cdot a$ dan $R \cdot a = \{r.a | r \in R\}$ maka $x = r_1 \cdot a, y = r_2 \cdot a$ untuk suatu $r_1, r_2, \in R$

Perhatikan bahwa :

$$x + y = (r_1 \cdot a) + (r_2 \cdot a) = (r_1 + r_2) \qquad \text{(Sifat Distributif)}$$

Karena $r_1, r_2, \in R$ dan R suatu ring maka $r_1 + r_2 \in R$

Tulis $r_1 + r_2 = r_3 \in R$ maka :

$$x + y = (r_1 + r_2) \cdot a = r_3 \cdot a \in R \cdot a$$

4. Ambil $x \in R \cdot a$. Adt $-x \in R \cdot a$

Karena $x \in R \cdot a$ dan $R \cdot a = \{r.a | r \in R\}$ maka $x = r_1 \cdot a$, untuk suatu $r_1 \in R$

Perhatikan bahwa :

$$-x = -(r_1 \cdot a) = (-r_1) \cdot a \qquad \text{(Sifat Distributif)}$$

Karena $r_1, r_2, \in R$ dan R suatu ring maka $-r_1 \in R$

Tulis $-r_1 = r_2 \in R$ maka :

$$-x = (-r_1) \cdot a = r_2 \cdot a \in R \cdot a$$

5. Ambil $u \in R \cdot a$ dan $r \in R$. Adt :

a. $u \cdot r \in R \cdot a$

b. $r \cdot u \in R \cdot a$

Karena $u \in R \cdot a$ dan $R \cdot a = \{r.a | r \in R\}$ maka $u = r_1 \cdot a$, untuk suatu $r_1 \in R$

Perhatikan bahwa :

a. $u \cdot r = (r_1 \cdot a) \cdot r$

$= r_{1.}(a \cdot r)$

$= r_1.(r \cdot a)$ (Sifat Komutatif)

$= (r_1 \cdot r) \cdot a$

Karena $r_1, r \in R$dan R suau ring maka $r_1 \cdot r \in R$

Tulis $r_1 \cdot r = r_2$ maka $u \cdot r = r_2 \cdot a \in R \cdot a$

b. $r \cdot u = r \cdot (r_1 \cdot a) = (r \cdot r_1) \cdot a$

Karena $r_1, r \in R$dan R suau ring maka $r \cdot r_1 \in R$

Tulis $r \cdot r_1 = r_3$ maka $r \cdot u = r_3 \cdot a \in R \cdot a$

Karena 1,2,3,4,5 maka $R \cdot a$ suatu ideal dari R

LEMMA 3.4.1

Misalkan (R,+, •) suatu ring dan U ideal dari R .

Tulis $R/U = \{a + U \mid a \in R\}$, setiap $x = a_1 + U$, $y = a_2 + U \in R/U$

Defenisikan operasi $\oplus$ dan $\odot$ di R/U sebagai berikut.

i. $x \oplus y = (a_1 + U) \oplus (a_2 + U) = (a_1 + a_2) + U$
ii. $x \odot y = (a_1 + U) \odot (a_2 + U) = (a_1 . a_2) + U$

Maka, $(R/U, \oplus, \odot)$ suatu ring.

Bukti :

Misalkan (R,+, •) suatu ring dan U ideal dari R .

Tulis $R/U = \{a + U \mid a \in R\}$, setiap $x = a_1 + U$, $y = a_2 + U \in R/U$defenisikan operasi $\oplus$ dan $\odot$ di R/U sebagai berikut.

i. $x \oplus y = (a_1 + U) \oplus (a_2 + U) = (a_1 + a_2) + U$
ii. $x \odot y = (a_1 + U) \odot (a_2 + U) = (a_1 . a_2) + U$

adt $(R/U , \oplus , \odot)$ suatu ring.

1. Ambil $x,y \in R/U$. Adt $x + y \in R/U$

   Karena $x,y \in R/U$ dan $R/U = \{a + U \mid a \in R\}$ maka

   $x = a_1 + U$, $y = a_2 + U$ Untuk suatu $a_1, a_2 \in R$.Perhatikan

   bahwa :

   $x \oplus y = (a_1 + U) \oplus (a_2 + U) = (a_1 + a_2) + U$

   Karena $a_1, a_2 \in R$ dan R suatu ring maka $a_1 + a_2 \in R$ .Tulis

   $a_3 = a_1 + a_2$ maka :

   $x \oplus y = (a_1 + a_2) + U = a_3 + U \in R/U$

2. Ambil $x,y \in R/U$. Adt $x \oplus y = y \oplus x$
   Karena $x,y \in R/U$ dan $R/U = \{a + U \mid a \in R\}$ maka $x = a_1 + U$, $ya_2 + U$
   Untuk suatu $a_1 + a_2 \in R$.

$$\begin{aligned} x \oplus y &= (a_1 + U) \oplus (a_2 + U) \\ &= (a_1 + a_2) + U \\ &= (a_2 + a_1) + U \\ &= (a_2 + U) \oplus (a_1 + U) \\ &= y \oplus x \end{aligned}$$

3. Ambil $x,y,z \in R/U$. Adt $x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z$
   Karena $x,y,z \in R/U$ dan $R/U = \{a + U \mid a \in R\}$
   maka $x = a_1 + U$, $y = a_2 + U$, $z = a_3 + U$
   Untuk suatu $a_1,a_2, a_3 \in R$.
   Perhatikan bahwa :

$$\begin{aligned} x \oplus (y \oplus z) &= (a_1 + U) \oplus ((a_2 + U) \oplus (a_3 + U)) \\ &= (a_1 + U) \oplus (a_2 + a_3) + U \\ &= (a_1 + (a_2 + a_3)) + U \\ &= ((a_1 + a_2) + a_3) + U \\ &= ((a_1 + a_2) + U) \oplus (a_3 + U) \\ &= ((a_1 + U) \oplus (a_2 + U)) \oplus (a_3 + U) \\ &= (x \oplus y) \oplus z \end{aligned}$$

4. Ambil $x \in R/U$. Adt ada $\bar{0} \in R/U$ sehingga berlaku $x \oplus \bar{0} = x$
   Karena $x \in R/U$ dan $R/U = \{a + U \mid a \in R\}$ maka $x = a_1 + U$ untuk suatu $a_1 \in R$.
   Pilih $\bar{0} = 0 + U$
   Perhatikan bahwa :

$$x \oplus \bar{\mathbf{0}} = (a_1 + U) \oplus (0 + U)$$
$$= (a_1 + 0) + U$$
$$= a_1 + U$$
$$= x$$

5. Ambil x ϵ R/U. Adt ada –x ϵ R/U sehingga berlaku $x \oplus (-x) = \bar{\mathbf{0}}$
   Karena x ϵ R/U dan R/U = $\{a + U \mid a \epsilon R\}$ maka $x = a_1 + U$ untuk suatu $a_1 \epsilon$ R.
   Pilih $-x = -a_1 + U$
   Perhatikan bahwa :
$$x \oplus (-x) = (a_1 + U) \oplus (-a_1 + U)$$
$$= (a_1 + -a_1) + U$$
$$= 0 + U$$
$$= \bar{\mathbf{0}}$$

6. Ambil x,y ϵ R/U. Adt $x \odot y$ ϵ R/U
   Karena x,y ϵ R/U dan R/U = $\{a + U \mid a \epsilon R\}$ maka $x = a_1 + U$, $y = a_2 + U$
   Untuk suatu a_1, a_2 ϵ R.Perhatikan
   bahwa :
$$x \odot y = (a_1 + U) \odot (a_2 + U)$$
$$= (a_1 . a_2) + U$$
   Karena a_1, a_2 ϵ R dan R suatu ring maka $a_1 . a_2$ ϵ R
   Tulis $a_3 = a_1 . a_2$, maka :
   $x \odot y = (a_1 . a_2) + U = a_3 + U$ ϵ R/U

7. Ambil x,y,z ϵ R/U. Adt $x \odot (y \odot z) = (x \odot y) \odot z$
   Karena x,y,z ϵ R/U dan R/U = $\{a + U \mid a \epsilon R\}$
   maka $x = a_1 + U$, $y = a_2 + U$, $z = a_3 + U$
   Untuk suatu a_1, a_2, a_3 ϵ R.
   Perhatikan bahwa :
$$x \odot (y \odot z) = (a_1 + U) \odot ((a_2 + U) \odot (a_3 + U))$$
$$= (a_1 + U) \odot (a_2 . a_3) + U$$
$$= (a_1 . (a_2 . a_3)) + U$$
$$= ((a_1 . a_2) . a_3) + U$$
$$= ((a_1 . a_2) + U) \odot (a_3 + U)$$
$$= ((a_1 + U) \odot (a_2 + U)) \odot (a_3 + U)$$
$$= (x \odot y) \odot z$$

8. Ambil x,y,z ϵ R/U. Adt
   i. $x \odot (y \oplus z) = (x \odot y) + (x \odot z)$
   ii. $(y \oplus z) \odot x = (y \odot x) + (z \odot x)$ Karena
   x,y,z ϵ R/U dan R/U = $\{a + U \mid a \epsilon R\}$ maka $x =$
   $a_1 + U$, $y = a_2 + U$, $z = a_3 + U$Untuk suatu

$a_1, a_2, a_3 \in R$.

Perhatikan bahwa :

i. $x \odot (y \oplus z)$
$= (a_1 + U) \odot ((a_2 + U) \oplus (a_3 + U))$
$= (a_1 + U) \odot (a_2 + a_3) + U$
$= (a_1 . (a_2 + a_3)) + U$
$= ((a_1 . a_2) + (a_1 . a_3)) + U$
$= ((a_1 . a_2) + U) \oplus (a_1 . a_3 + U)$
$=((a_1 U) \odot (a_2 + U)) \oplus ((a_1 + U) \odot (a_3 + U))$
$= (x \odot y) + (x \odot z)$

ii. $(y \oplus z) \odot x$
$= ((a_2 + U) \oplus (a_3 + U)) \odot (a_1 + U)$
$= ((a_2 + a_3) + U) \odot (a_1 + U)$
$= ((a_2 + a_3) . a_1) + U$
$= ((a_2 . a_1) + (a_3 . a_1)) + U$
$= ((a_2 . a_1) + U) \oplus ((a_3 . a_1) + U)$
$=((a_2 + U) \odot (a_1 + U)) \oplus$
$((a_3 + U) \odot (a_1 + U))$
$= (y \odot x) \oplus (z \odot x)$

DEFINISI 31

Misalkan $(R,+,\bullet)$ suatu ring dan U ideal dari R .

Tulis $R/U = \{a + U \mid a \in R\}$.

Ring (R/U, ⍰,⍰) disebut **ring kosien** atau **ring faktor**.

Contoh 4:

$(\mathbb{Z},+,\cdot)$ suatu ring.

$6\mathbb{Z} = \{\cdots,-12,-6,0,6,12,\cdots\}$ suatu ideal di $\mathbb{Z}\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} = \{a + 6\mathbb{Z} \mid a \in \mathbb{Z}\}$
$= \{0 + 6\mathbb{Z}, 1 + 6\mathbb{Z}, 2 + 6\mathbb{Z}, 3 + 6\mathbb{Z}, 4 + 6\mathbb{Z}, 5 + 6\mathbb{Z}\}$

$(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z},\oplus,\odot)$ suatu ring faktor

$\oplus$	$0 + 6\mathbb{Z}$	$1 + 6\mathbb{Z}$	$2 + 6\mathbb{Z}$	$3 + 6\mathbb{Z}$	$4 + 6\mathbb{Z}$	$5 + 6\mathbb{Z}$
$0 + 6\mathbb{Z}$	$0 + 6\mathbb{Z}$	$1 + 6\mathbb{Z}$	$2 + 6\mathbb{Z}$	$3 + 6\mathbb{Z}$	$4 + 6\mathbb{Z}$	$5 + 6\mathbb{Z}$
$1 + 6\mathbb{Z}$	$1 + 6\mathbb{Z}$	$2 + 6\mathbb{Z}$	$3 + 6\mathbb{Z}$	$4 + 6\mathbb{Z}$	$5 + 6\mathbb{Z}$	$0 + 6\mathbb{Z}$
$2 + 6\mathbb{Z}$	$2 + 6\mathbb{Z}$	$3 + 6\mathbb{Z}$	$4 + 6\mathbb{Z}$	$5 + 6\mathbb{Z}$	$0 + 6\mathbb{Z}$	$1 + 6\mathbb{Z}$
$3 + 6\mathbb{Z}$	$3 + 6\mathbb{Z}$	$4 + 6\mathbb{Z}$	$5 + 6\mathbb{Z}$	$0 + 6\mathbb{Z}$	$1 + 6\mathbb{Z}$	$2 + 6\mathbb{Z}$
$4 + 6\mathbb{Z}$	$4 + 6\mathbb{Z}$	$5 + 6\mathbb{Z}$	$0 + 6\mathbb{Z}$	$1 + 6\mathbb{Z}$	$2 + 6\mathbb{Z}$	$3 + 6\mathbb{Z}$

$5 + 6\mathbb{Z}$	$5 + 6\mathbb{Z}$	$0 + 6\mathbb{Z}$	$1 + 6\mathbb{Z}$	$2 + 6\mathbb{Z}$	$3 + 6\mathbb{Z}$	$4 + 6\mathbb{Z}$

$\odot$	$0 + 6\mathbb{Z}$	$1 + 6\mathbb{Z}$	$2 + 6\mathbb{Z}$	$3 + 6\mathbb{Z}$	$4 + 6\mathbb{Z}$	$5 + 6\mathbb{Z}$
$0 + 6\mathbb{Z}$	$0 + 6\mathbb{Z}$	$0 + 6\mathbb{Z}$	$0 + 6\mathbb{Z}$	$0 + 6\mathbb{Z}$	$0 + 6\mathbb{Z}$	$0 + 6\mathbb{Z}$
$1 + 6\mathbb{Z}$	$0 + 6\mathbb{Z}$	$1 + 6\mathbb{Z}$	$2 + 6\mathbb{Z}$	$3 + 6\mathbb{Z}$	$4 + 6\mathbb{Z}$	$5 + 6\mathbb{Z}$
$2 + 6\mathbb{Z}$	$0 + 6\mathbb{Z}$	$2 + 6\mathbb{Z}$	$4 + 6\mathbb{Z}$	$0 + 6\mathbb{Z}$	$2 + 6\mathbb{Z}$	$4 + 6\mathbb{Z}$
$3 + 6\mathbb{Z}$	$0 + 6\mathbb{Z}$	$3 + 6\mathbb{Z}$	$0 + 6\mathbb{Z}$	$3 + 6\mathbb{Z}$	$0 + 6\mathbb{Z}$	$3 + 6\mathbb{Z}$
$4 + 6\mathbb{Z}$	$0 + 6\mathbb{Z}$	$4 + 6\mathbb{Z}$	$2 + 6\mathbb{Z}$	$0 + 6\mathbb{Z}$	$4 + 6\mathbb{Z}$	$2 + 6\mathbb{Z}$
$5 + 6\mathbb{Z}$	$0 + 6\mathbb{Z}$	$5 + 6\mathbb{Z}$	$4 + 6\mathbb{Z}$	$3 + 6\mathbb{Z}$	$2 + 6\mathbb{Z}$	$1 + 6\mathbb{Z}$

1) Dari tabel penjumlahan $\oplus$ dapat dilihat bahwa setiap $x,y \in \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ berlaku $x \oplus y \in \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$
2) Dari tabel penjumlahan $\oplus$ dapat dilihat bahwa setiap $x,y \in \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ berlaku $x \oplus y = y \oplus x$
3) Dari tabel penjumlahan $\oplus$ dapat ditunjukkan bahwa setiap $x,y,z \in \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ berlaku $x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z$

Contoh, untuk $x = 2 + 6\mathbb{Z}$
$y = 3 + 6\mathbb{Z}$
$z = 4 + 6\mathbb{Z}$

$$\begin{aligned}
x \oplus (y \oplus z) &= (2 + 6\mathbb{Z}) \oplus ((3 + 6\mathbb{Z}) \oplus (4 + 6\mathbb{Z})) \\
&= (2 + 6\mathbb{Z}) \oplus ((3 + 4) + 6\mathbb{Z}) \\
&= (2 + 6\mathbb{Z}) \oplus (1 + 6\mathbb{Z}) \\
&= (2 + 1) + 6\mathbb{Z} \\
&= 3 + 6\mathbb{Z} \\
(x \oplus y) \oplus z &= ((2 + 6\mathbb{Z}) \oplus (3 + 6\mathbb{Z})) \oplus (4 + 6\mathbb{Z}) \\
&= ((2 + 3) + 6\mathbb{Z}) \oplus (4 + 6\mathbb{Z}) \\
&= (5 + 6\mathbb{Z}) \oplus (4 + 6\mathbb{Z}) \\
&= (5 + 4) + 6\mathbb{Z} \\
&= 3 + 6\mathbb{Z}
\end{aligned}$$

4) Dari tabel penjumlahan $\oplus$ dapat dilihat bahwa $0 + 6\mathbb{Z}$ beroperasi sebagai unsur identitas. Sehingga setiap $x \in \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ berlaku $x \oplus (0 + 6\mathbb{Z}) = x$
5) Dari tabel penjumlahan $\oplus$ diperoleh :
   - $(0 + 6\mathbb{Z}) = 0 + 6\mathbb{Z}$
   - $(1 + 6\mathbb{Z}) = 5 + 6\mathbb{Z}$
   - $(2 + 6\mathbb{Z}) = 4 + 6\mathbb{Z}$
   - $(3 + 6\mathbb{Z}) = 3 + 6\mathbb{Z}$
   - $(4 + 6\mathbb{Z}) = 2 + 6\mathbb{Z}$

- $-(5 + 6\mathbb{Z}) = 1 + 6\mathbb{Z}$

perhatikan bahwa terdapat 6 bilangan bulat yaitu 0,1,2,3,4,5 dimana penjumlahan dimulai dari 0, sehingga pada $(1+6\mathbb{Z})= 5+6\mathbb{Z}$. Untuk $(2+6\mathbb{Z})= 4+6\mathbb{Z}$ perhitungan dilanjutkan dari angka 5, begitu seterusnya. $(1+6\mathbb{Z})$ merupakan 1 langkah dari $6\mathbb{Z}$.

6) Dari tabel perkalian $\odot$ dapat dilihat bahwa setiap $x,y \in \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ berlaku $x \odot y \in \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$

7) Dari tabel perkalian $\odot$ dapat ditunjukkan bahwa setiap $x,y,z \in \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ berlaku $x \odot (y \odot z) = (x \odot y) \odot z$

Contoh 4.2 : $x= 2 + 6\mathbb{Z}$
$y= 3 + 6\mathbb{Z}$
$z= 4 + 6\mathbb{Z}$

$$\begin{aligned}
x \odot (y \odot z) &= (2 + 6\mathbb{Z}) \odot ((3 + 6\mathbb{Z}) \odot (4 + 6\mathbb{Z})) \\
&= (2 + 6\mathbb{Z}) \odot ((3.4) + 6\mathbb{Z}) \\
&= (2 + 6\mathbb{Z}) \odot (0 + 6\mathbb{Z}) \\
&= (2.0) + 6\mathbb{Z} \\
&= 0 + 6\mathbb{Z}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(x \odot y) \odot z &= ((2 + 6\mathbb{Z}) \odot (3 + 6\mathbb{Z})) \odot (4 + 6\mathbb{Z}) \\
&= ((2.3) + 6\mathbb{Z}) \odot (4 + 6\mathbb{Z}) \\
&= (0 + 6\mathbb{Z}) \odot (4 + 6\mathbb{Z}) \\
&= (0.4) + 6\mathbb{Z} \\
&= 0 + 6\mathbb{Z}
\end{aligned}$$

1) Dari tabel penjumlahan $\oplus$ dan perkalian $\odot$ dapat ditunjukkan bahwa setiap $x,y \in \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ berlaku :

   i. $x \odot (y \oplus z) = (x \odot y) \oplus (x \odot z)$
   ii. $(y \oplus z) \odot x = (y \odot x) \oplus (z \odot x)$

Contoh $x= 1 + 6\mathbb{Z}$
$y= 2 + 6\mathbb{Z}$
$z= 3 + 6\mathbb{Z}$

i.
$$\begin{aligned}
x \odot (y \oplus z) &= (1 + 6\mathbb{Z}) \odot ((2 + 6\mathbb{Z}) \oplus (3 + 6\mathbb{Z})) \\
&= (1 + 6\mathbb{Z}) \odot ((2 + 3) + 6\mathbb{Z}) \\
&= (1 + 6\mathbb{Z})(5 + 6\mathbb{Z}) \\
&= (1.5) + 6\mathbb{Z} \\
&= 5 + 6\mathbb{Z}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(x \odot y) \oplus (x \odot z) &= ((1 + 6\mathbb{Z}) \odot (2 + 6\mathbb{Z})) \oplus ((1 + 6\mathbb{Z}) \\
&\quad \odot (3 + 6\mathbb{Z})) \\
&= (1.2 + 6\mathbb{Z}) \oplus (1.3 + 6\mathbb{Z})
\end{aligned}$$

$= (2 + 6\mathbb{Z}) \oplus (3 + 6\mathbb{Z})$

$= (2 + 3) + 6\mathbb{Z}$

$= 5 + 6\mathbb{Z}$

ii. $(y \oplus z) \odot x = ((2 + 6\mathbb{Z}) \oplus (3 + 6\mathbb{Z})) \odot (1 + 6\mathbb{Z})$
$= ((2 + 3) + 6\mathbb{Z}) \odot (1 + 6\mathbb{Z})$
$= (5 + 6\mathbb{Z}) \odot (1 + 6\mathbb{Z})$
$= (5.1) + 6\mathbb{Z}$
$= 5 + 6\mathbb{Z}$

$(y \odot x) \oplus (z \odot x) = ((2 + 6\mathbb{Z}) \odot (1 + 6\mathbb{Z})) \oplus ((3 + 6\mathbb{Z}) \odot (1 + 6\mathbb{Z}))$
$= ((2.1) + 6\mathbb{Z}) \oplus ((3.1) + 6\mathbb{Z})$
$= (2 + 6\mathbb{Z}) \oplus (3 + 6\mathbb{Z})$
$= (2 + 3) + 6\mathbb{Z}$
$= 5 + 6\mathbb{Z}$

Karena 1,2,3, ⋯, 8 maka $(\mathbb{Z}/6\,\mathbb{Z}, \oplus, \odot)$ suatu ring faktor

Contoh

$$M = \left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix} | a \in \mathbb{R}\right\}$$

Periksa apakah M suatu ring, daerah integral, lapangan terhadap operasi penjumlahan dan operasi perkalian matriks.

Jawab:

1) Ambil $x, y \in R$ akan ditunjukkan $x + y \in M$
   Karena $x, y \in R$ dan $M = \left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix} | a \in \mathbb{R}\right\}$ maka
   $$x = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_{-1} \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & a_{-2} \end{pmatrix}, untuk\ suatu\ a_1, a_2 \in \mathbb{R}$$
   Perhatikan bahwa
   $$x + y = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_{-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & a_{-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & 0 \\ 0 & a_{-1} + (a_{-2}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & 0 \\ 0 & -(a_1 + a_2) \end{pmatrix}$$
   Karena $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ maka $a_1 + a_2 \in \mathbb{R}$
   Karena $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ maka $-(a_1 + a_2) \in \mathbb{R}$
   $\therefore x + y \in M$
2) Ambil $x, y \in M$ akan ditunjukkan $x + y = y + x$
   Karena $x, y \in R$ dan $M = \left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix} | a \in \mathbb{R}\right\}$ maka
   $$x = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_{-1} \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & a_{-2} \end{pmatrix}, untuk\ suatu\ a_1, a_2 \in \mathbb{R}$$
   Perhatikan bahwa

$$x + y = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_{-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & a_{-2} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & 0 \\ 0 & a_{-1} + (a_{-2}) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} a_2 + a_1 & 0 \\ 0 & -a_2 + (-a_1) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & a_{-2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_{-1} \end{pmatrix}$$
$$= y + x$$
$\therefore x + y = y + x$

3) Ambil $x, y \in M$ akan ditunjukkan $x + (y + z) = (x + y) + z$
Karena $x, y \in R$ dan $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix} | a \in \mathbb{R} \right\}$ maka
$$x = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_{-1} \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & a_{-2} \end{pmatrix}, z = \begin{pmatrix} a_3 & 0 \\ 0 & a_{-3} \end{pmatrix} \ untuk\ suatu\ a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$$
Perhatikan bahwa
$$x + (y + z) = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_{-1} \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & a_{-2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_3 & 0 \\ 0 & a_{-3} \end{pmatrix} \right]$$
$$= \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_{-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 + a_3 & 0 \\ 0 & a_{-2} + a_{-3} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} a_1 + (a_2 + a_3) & 0 \\ 0 & -a_1 + ((-a_2) + (-a_3)) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} (a_1 + a_2) + a_3 & 0 \\ 0 & (-a_1 + (-a_2)) + (-a_3) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & 0 \\ 0 & -a_1 + ((-a_2) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_3 & 0 \\ 0 & a_{-3} \end{pmatrix}$$
$$= \left[\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_{-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & a_{-2} \end{pmatrix} \right] + \begin{pmatrix} a_3 & 0 \\ 0 & a_{-3} \end{pmatrix}$$
$\therefore x + (y + z) = (x + y) + z$

4) Akan ditunjukkan $e \in M$sehingga setiap $x \in M$ berlaku $x + e = x$
Pilih $e = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, ambil $x \in M$
Karena $x \in M$ dan $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix} | a \in \mathbb{R} \right\}$ maka
$$x = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_{-1} \end{pmatrix}, untuk\ suatu\ a_1 \in \mathbb{R}$$
Perhatikan bahwa
$$x + e = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_{-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_{-1} \end{pmatrix} = x$$
$\therefore x + e = x$

5) Ambil $x \in M$ akan ditunjukkan $-a \in M$sehingga $x + (-x) = 0$
Karena $x \in M$ dan $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix} | a \in \mathbb{R} \right\}$ maka
$$x = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_{-1} \end{pmatrix}, untuk\ suatu\ a_1 \in \mathbb{R}$$
Pilih $-x = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_{-1} \end{pmatrix}$ karena $a_1 \in \mathbb{R}$ maka $-a_1 \in \mathbb{R}$

Berarti $-x = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_{-1} \end{pmatrix} \in M$

Perhatikan bahwa

$x + (-x) = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_{-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_{-1} \end{pmatrix}$

$\quad = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\therefore x + (-x) = 0$

6) Ambil $x, y \in R$ akan ditunjukkan $x + y \in M$

Karena $x, y \in R$ dan $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix} | a \in \mathbb{R} \right\}$ maka

$$x = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_{-1} \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & a_{-2} \end{pmatrix}, untuk\ suatu\ a_1, a_2 \in \mathbb{R}$$

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} xy &= \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & a_{-2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_1 a_2 & 0 \\ 0 & a_{-1}(a_{-2}) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_1 a_2 & 0 \\ 0 & a_1 a_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$xy = \begin{pmatrix} a_1 a_2 & 0 \\ 0 & a_1 a_2 \end{pmatrix}$

$\therefore$ xy bukan unsur di M

$\therefore$ karena xy bukan unsur di M maka R bukan suatu ring, juga bukan termasuk daerah integral dan bukan suatu lapangan.

Definisi 33

Misalkan (R_1 , $+_1$, $._1$)dan (R_2 , $+_2$, $._2$) suatu ring.
Ring R_1 disebut dapat disisipkan di ring R_2, jika ada suatu pemetaan homomorfisma ϕ yang satu-satu dari R_1 ke R_2

Teorema 3.6.1

Setiap daerah integral dapat disisipkan pada suatu lapangan

Bukti:
Misalkan (D , $+,\cdot$) suatu daerah integral
Akan ditunjukkan D dapat disisipkan pada suatu lapangan F.
Tulis $\mu = \{(a,b)|a,b \in D, b \neq 0\}$
setiap $(a,b),(c,d) \in \mu$ definisikan relasi ~ di μ sbb:
$(a,b) \sim (c,d)$ jika dan hanya jika $ad = bc$
Akan ditunjukkan : ~ suatu relasi ekuivalen.

1. Ambil $(a,b) \in \mu$.
   Akan ditunjukkan $(a,b) \sim (a,b)$ yaitu dengan menunjukan $ab = ba$.
   Karena $a,b \in D$ dan D daerah integral maka $ab = ba$.
2. Ambil $(a,b),(c,d) \in \mu$ dengan $(a,b) \sim (c,d)$.
   Akan ditunjukkan $(c,d) \sim (a,b)$ yaitu dengan menunjukan $cd = da$.
   Karena $(a,b) \sim (c,d)$ maka $ad = bc$.
   Karena $a,b,c,d \in D$ dan D daerah integral maka $da = ad, cb = bc$.
   Akibatnya $cb = da$.
3. Ambil $(a,b),(c,d),(e,f) \in \mu$ dengan $(a,b) \sim (c,d)$ dan $(c,d) \sim (e,f)$
   Akan ditunjukkan $(a,b) \sim (e,f)$ yaitu dengan menunjukan $af = be$.
   Karena $(a,b) \sim (c,d)$ maka $ad = bc$.
   Karena $(c,d) \sim (e,f)$ maka $cf = de$.
   Perhatikan bahwa :

$$cf = de$$
$$b\,(cf) = b\,(de)$$
$$bcf = bde \ldots\ldots\ldots *)$$

   Karena $ad = bc$ maka dari $*$) diperoleh :

$$adf = bde \qquad \text{atau}$$
$$d\,(af) = d\,(be) \qquad \text{atau}$$
$$d\,[af - be] = 0$$

Karena $a, b, c, d, e, f \in D$ maka $af - bc \in D$
Karena $(c, d) \in \mu$ maka $d \neq 0$
Karena $d, af - be \in D,\ d \neq 0, d[af - be] = 0$ dan D daerah integral maka $[af - be] = 0$ atau $af = be$.

Karena 1,2,3 maka ~ suatu relasi ekuivalen.

Ambil $(a, b) \in \mu$
Tulis kelas ekuivalen yang memuat (a, b) sebagai $[(a, b)]$ atau $[a, b]$
Maka

$$[a, b] = \{(x, y) \in \mu | (a, b) \sim (x, y)\}$$
$$= \{(x, y) \,\big|\, x, y \in D, y \neq 0, ay = bx\}$$

Tulis $F = \{[a, b] | a, b \in D, b \neq 0\}$
Setiap $x = [a_1, b_1], y = [a_2, b_2] \in F$ definisikan operasi + dan $\cdot$
sbb:

i) $x + y = [a_1, b_1] + [a_2, b_2] = [a_1b_2 + a_2b_1, b_1b_2]$
ii) $x \cdot y = [a_1, b_1] \cdot [a_2, b_2] = [a_1a_2 \cdot b_1b_2]$

Akan ditunjukkan $(F, +, \cdot)$ suatu lapangan

Jawab :

1. Ambil $x, y \in F$. Akan ditunukkan $x + y \in F$
   Karena $x, y \in F$ dan F = {[a,b] | a,b $\in$ D, b $\neq$0}
   Maka $x = [a_1, b_1],\ y = [a_2, b_2]$ untuk suatu $a_1, a_2, b_1, b_2 \in D$ dan $b_1, b_2 \neq 0$
   Perhatikan bahwa
   $$x + y = [a_1, b_1] + [a_2, b_2]$$
   $$= [a_1b_2 + a_2b_1\ , b_1b_2]$$
   Karena $a_1, a_2, b_1, b_2 \in D$ dan D daerah integral maka$a_1b_2 + a_2b_1\ , b_1b_2 \in D$
   Karena $b_1, b_2 \neq 0$ maka $b_1b_2 \neq 0$
   Sehingga $x + y = [a_1b_2 + a_2b_1\ , b_1b_2] \in F$

2. Ambil Ambil $x, y \in F$. Akan ditunjukkan $x + y = y + x$
   Karena $x, y \in F$ dan F = {[a,b] | a,b $\in$ D, b $\neq$0}
   Maka $x = [a_1, b_1], y = [a_2, b_2]$ untuk suatu $a_1, a_2, b_1, b_2 \in D$ dan $b_1, b_2 \neq 0$
   Perhatikan bahwa
   $$x + y = [a_1, b_1] + [a_2, b_2]$$
   $$= [a_1b_2 + a_2b_1\ , b_1b_2]$$
   $$= [a_2b_1 + a_1b_2\ , b_2b_1]$$
   $$= [a_2, b_2] + [a_1, b_1]$$
   $$= y + x$$

3. Ambil $x, y, z \in F$. Akan ditunjukkan $(x + y) + z = x + (y + z)$

Karena $x, y, z \in F$ dan $F = \{[a, b] \mid a, b \in D, b \neq 0\}$

Maka $x = [a_1, b_1]$, $y = [a_2, b_2]$, $z = [a_3, b_3]$ untuk suatu $a_i, b_i \in D$ dan $b_i \neq 0$ dimana $i = 1,2,3$

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}(x + y) + z &= ([a_1, b_1] + [a_2, b_2]) + [a_3, b_3] \\ &= ([a_1b_2 + a_2b_1 , b_1b_2]) + [a_3, b_3] \\ &= [(a_1b_2 + a_2b_1)b_3 + (b_1b_2)a_3 , (b_1b_2)b_3] \\ &= [(a_1b_2)b_3 + (a_2b_1)b_3 + (b_1b_2)a_3 , (b_1b_2)b_3] \\ &= [a_1(b_2b_3) + (a_2b_3 + b_23)b_1 , b_1(b_2b_3)] \\ &= [a_1, b_1] + [a_2b_3 + a_3b_2, a_2b_3] \\ &= [a_1, b_1] + ([a_2b_2] + [a_3, b_3]) \\ &= x + (y + z)\end{aligned}$$

4. Adt $[a, b] \in F$ dengan b ≠0 adalah unsur iddentitas di F terhadap +

Ambil $x \in F$ adt $x + [0, b] = X$

Karena $x \in F$ dan F = {[a,b] | a,b ∈ D, b ≠0}

Maka $x = [a_1, b_1]$ untuk suatu $a_1, b_1 \in D$ dan $b_1 \neq 0$

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}x + [0, b] &= [a_1, b_1] + [0, b] \\ &= [a_1b + b_10 , b_1b] \\ &= [a_1b , b_1b]\end{aligned}$$

Akan ditunjukkan $(a_1b , b_1b) \sim (a_1, b_1)$

Karena $a_1, b_1, b \in D$ dan D daerah integral maka $a_1bb_1 = b_1ba_1$

Berarti $(a_1b , b_1b) \sim (a_1, b_1)$

Akibatnya $[a_1b , b_1b] = [a_1, b_1]$

Jadi $x + [D, b] = [a_1, b_1] = x$

5. Ambil $x \in F$ adt $x \in F \ni x + (-x) = 0$

Karena $x \in F$ dan $F = \{[a, b] \mid a, b \in D, b \neq 0\}$

Maka $x = [a_1, b_1]$ untuk suatu $a_1, b_1 \in D$ dan $b_1 \neq 0$

Pilih $-x = [-a_1, b_1]$ karena $a_1 \in D$ dan D daerah integral maka $-a_1 \in D$

Karena $-a_1, b_1 \in D$ dan $b_1 \neq 0$ maka $-x \in F$

Perhatikan bahwa:

$$\begin{aligned}x + (-x) &= [a_1, b_1] + [-a_1, b_1] \\ &= [a_1b_1 + (-a_1)b_1 , b_1b_1]\end{aligned}$$

$$= [a_1b_1 - a_1b_1 \,, b_1b_1]$$
$$= [0 \,, b_1b_1]$$

Karena $[0 \,, b_1b_1] = \{(0,p) | (0, b_1b_1) \sim (0,p)\}$

$= \{(0,p) | p \in D, p \neq 0\}$

Dan $b_1 \neq 0, b_1b_1 \neq 0$,0 dengan memilih p=1 sehingga $[0 \,, b_1b_1] \sim (0,1)$

Atau 0·1=0=(b_1b_1)·0

$$\therefore b_1b_1 = 1$$

6. Ambil $x, y \in F$ adt $xy \in F$

   Karena $x, y \in F$ dan $F = \{[a,b] \mid a, b \in D, b \neq 0\}$

   Maka $x = [a_1, b_1] y = [a_2, b_2]$ untuk suatu $a_1, a_2, b_1, b_2 \in D$ dan $b_1, b_2 \neq 0$

   Perhatikan bahwa

   $$xy = [a_1, b_1][a_2, b_2]$$
   $$= [a_1a_2 \,, b_1b_2]$$

   Karena $a_1, a_2, b_1, b_2 \in D$ dan D daerah integral maka $a_1, a_2, b_1, b_2 \in D$

   Karena $b_1, b_2 \neq 0$ maka $b_1, b_2 \neq 0$

   Sehingga

   $$xy = [a_1a_2 \,, b_1b_2] \in F$$

7. Ambil $x, y, z \in F$ adt $(xy)z = x(yz)$

   Karena $x, y, z \in F$ dan F = {[a,b] | a,b ∈ D, b ≠0}

   Maka $x = [a_1, b_1] y = [a_2, b_2] z = [a_3, b_3]$ untuk suatu $a_i, b_i \in D$ dan $b_i \neq 0$ dimana i=1,2,3

   Perhatikan bahwa

   $$(xy)z = ([a_1, b_1][a_2, b_2])[a_3, b_3]$$
   $$= ([a_1a_2 \,, b_1b_2])[a_3, b_3]$$
   $$= [(a_1a_2)a_3, (b_1b_2)b_3 \,]$$
   $$= [a_1(a_2a_3), b_1(b_2b_3) \,]$$

   = [▯1▯1 ,]([▯2▯3, ▯2▯3])

   $$= x(yz)$$

8. Ambil $x, y, z \in F$ akan ditunjukkan $(i).\ x(y+z) = x.y + x.z$

   $(ii).\ (y+z)x = yx + zx$

   Karena $x, y, z \in F$ dan $F = \{[a,b] | a, b \in D, b \neq 0\}$ maka$x = [a_1, b_1], y = [a_2, b_2], z = [a_3, b_3]$ untuk suatu $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 \in D$ dan $b_1, b_2, b_3 \neq 0$

   Perhatika bahwa :

$(i).\, x(y+z) = [a_1, b_1]([a_2, b_2] + [a_3, b_3])$

$= [a_1, b_1][a_2b_3 + a_3b_2,\ b_2b_3]$

$= [a_1\,(a_2b_3 + a_3b_2),\ b_1\,(b_2b_3)]$

$= [a_1a_2b_3 + a_1a_3b_2\ , b_1b_2b_3]$

$xy + xz = ([a_1, b_1][a_2, b_2]) + ([a_1, b_1][a_3, b_3])$

$= [a_1a_2, b_1b_2] + [a_1a_3, b_1b_3]$

$= [a_1a_2b_1b_3 + a_1a_3b_1b_2\ ,\ b_1b_2b_1b_3]$

$= [\ b_1(a_1a_2b_3 + a_1a_3b_2\ ),\quad b_1(\ b_1b_2b_3)]$

Akan ditunjukkan:

$(a_1a_2b_3 + a_1a_3b_2\ ,\ b_1b_2b_3) \sim (b_1(a_1a_2b_3 + a_1a_3b_2\ ),\ b_1(\ b_1b_2b_3))$

Karena $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 \in D$ dan D daerah integral maka:

$(a_1a_2b_3 + a_1a_3b_2\ ).\, b_1(\ b_1b_2b_3) = (\ b_1b_2b_3)\ (b_1(a_1a_2b_3 + a_1a_3b_2))$

Berarti,

$(a_1a_2b_3 + a_1a_3b_2\ ,\ b_1b_2b_3) \sim (b_1(a_1a_2b_3 + a_1a_3b_2\ ),\ b_1(\ b_1b_2b_3))$

Akibatnya,

$(a_1a_2b_3 + a_1a_3b_2\ ,\ b_1b_2b_3) = (b_1(a_1a_2b_3 + a_1a_3b_2\ ),\ b_1(\ b_1b_2b_3))$

Jadi, $x(y+z) = xy + xz$

$(ii).\, (y+z)x = ([a_2, b_2] + [a_3, b_3])[a_1, b_1]$

$= [a_2b_3 + a_3b_2,\ b_2b_3][a_1, b_1]$

$= [(a_2b_3 + a_3b_2)a_1\ ,\ (b_2b_3)b_1]$

$= [a_1a_2b_3 + a_1a_3b_2\ , b_1b_2b_3]$

$yx + zx = ([a_2, b_2][a_1, b_1]) + ([a_3, b_3][a_1, b_1])$

$= [a_1a_2, b_1b_2] + [a_1a_3, b_1b_3]$

$= [a_1a_2b_1b_3 + a_1a_3b_1b_2\ ,\ b_1b_2b_1b_3]$

$$= [(a_1a_2b_3 + a_1a_3b_2)\, b_1,\ \ (b_1b_2b_3)\, b_1]$$

Akan ditunjukkan:

$(a_1a_2b_3 + a_1a_3b_2),\ (b_1b_2b_3) \sim ((a_1a_2b_3 + a_1a_3b_2)\, b_1,\ (b_1b_2b_3)\, b_1)$

Karena $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 \in D$ dan D daerah integral maka:

$$((a_1a_2b_3 + a_1a_3b_2)b_1)(b_1b_2b_3) = ((b_1b_2b_3)b_1))(a_1a_2b_3 + a_1a_3b_2)$$

Berarti,
$(a_1a_2b_3 + a_1a_3b_2,\ b_1b_2b_3) \sim ((a_1a_2b_3 + a_1a_3b_2)b_1,\ (b_1b_2b_3)b_1)$

Akibatnya,
$(a_1a_2b_3 + a_1a_3b_2,\ b_1b_2b_3) = ((a_1a_2b_3 + a_1a_3b_2)b_1, (b_1b_2b_3)b_1)$

Jadi, $x(y + z) = yx + zx$

9. Ambil $x, y \in F$ akan ditunjukkan $xy = yx$

   Karena $x, y \in F$ dan $F = \{ [a, b] \dashv \mid a, b \in D, b \neq 0 \}$ maka $x = [a_1, b_1], y = [a_2, b_2]$ untuk suatu $a_1, b_1 a_2, b_2 \in D$ dan $b_1, b_2 \neq 0$

   Perhatikan bahwa :

   $xy = [a_1, b_1][a_2, b_2]$

   $= [a_1a_2, b_1b_2]$ . . . (*)

   $yx = [a_2, b_2][a_1, b_1]$

   $= [a_2a_1, b_2b_1]$

   $= [a_1a_2, b_1b_2]$ . . . (**)

   Karena (*) dan (**) maka $xy = yx$

10. Akan ditunjukkan $[b, b]$ dengan $b \in D$ dan $b \neq 0$ adalah unsur identitasterhadap operasi perkalian

    Ambil $x \in F$, akan ditunjukkan $x[b, b] = x$

    Karena $x \in F$ dan $F = \{ [a, b] \dashv \mid a, b \in D, b \neq 0 \}$ maka $x = [a_1, b_1]$ untuk suatu $a_1, b_1 \in D$ dan $b_1 \neq 0$

Perhatikan bahwa :

$x[b,b] = [a_1, b_1][b,b]$

$= [a_1 b\ , b_1 b]$

Akan ditunjukkan $(a_1 b\ , b_1 b) \sim (a_1, b_1)$

Karena $a_1, b_1 \in D$ dan D daerah integral maka:

$$a_1.b.b_1 = b_1.b.a_1$$

Berarti $(a_1 b\ , b_1 b) \sim (a_1, b_1)$

Akibatnya, $(a_1 b\ , b_1 b) = (a_1, b_1)$

Jadi,

$x[b,b] = [a1b\ , b1b]$

$= [a1, b1]$

$= x$

11. Ambil $x \in F$ dengan $x \neq [a,b]$, akan ditunjukkan ada $y \in F$ sehingga $xy = [b,b]$, $b \neq 0$

Karena $x \in F$ dan $F = \{ [a,b] \dashv \mid a,b \in D, b \neq 0 \}$ maka $x = [a_1, b_1]$ untuk suatu $a_1, b_1 \in D$ dan $b1 \neq 0$

Pilih $y = [b_1, a_1]$maka $y \in F$

Perhatikan bahwa :

$xy = [a_1, b_1][b_1, a_1]$

$= [a_1 b_1\ , b_1 a_1]$

Akan ditunjukkan $[a_1 b_1\ , b_1 a_1] = [b,b]$ yaitu dengan menunjukkan $(a_1 b_1\ , b_1 a_1) \sim (b,b)$ atau dengan menunjukkan $a_1 b_1 b = b_1 a_1 b$

$$\therefore xy = [b,b]$$

Karena 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10 dan 11 maka F suatu lapangan.

Contoh 1 :

Buat pemetaan φ dari D ke F sebagai berikut :

$\varphi : D \to F$

$a \mapsto [ax, x]\ , x \neq 0$

(i) Akan ditunjukkan φ homomorfisma ring

1. Ambil $a, b \in D$. Akan ditunjukkan $\varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b)$
   Perhatikan bahwa :
   $\varphi(a + b) = [(a + b)x, x]$
   $= [(ax + bx)x, xx]$
   $= [(ax)x + (bx)x\ , xx]$
   $= [ax, x] + [bx, x]$
   $= \varphi(a) + \varphi(b)$
2. Ambil $a, b \in D$. Akan ditunjukkan $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$
   Perhatikan bahwa :
   $\varphi(ab) = [(ab)x, x]$
   $= [((ab)x)x, xx]$
   $= [(ax)(bx), xx]$
   $= [ax, x][bx, x]$
   $= \varphi(a)\varphi(b)$
   Karena 1 dan 2 maka φ homomorfisma ring.

(ii). Akan ditunjukkan φ satu-satu.

Perhatikan bahwa :

$$I(\varphi) = \{a \in D\ |\varphi(a) = [0, b], b \neq 0\}$$

$$= \{a \in D|[ax, x] = [0, b], b \neq 0\}$$

Karena $[ax, x] = [0, b]$ maka $(ax, x) \sim (0, b)$ atau $ax.b = x.0 = 0$

Karena $a, x, b \in D\ , x, b \neq 0, a.x.b = 0$ dan D suatu daerah integral maka haruslah $a = 0$.

Ini berarti $I(\varphi) = \{0\}$.

Karena $I(\varphi) = \{0\}$ maka menurut Lemma φ satu-satu.

Contoh 4:

Misalkan $(R,+,\cdot)$ suatu ring dan M,N suatu ideal dari R. Periksa apakah $M\cap N$ suatu ideal dari R.

Jawab :

1. Akan ditunjukkan $M\cap N\subseteq R$.
   Karena M,N ideal dari R, maka $M,N \subseteq R$.
   Akibatnya $M\cap N\subseteq R$.
2. Akan ditunjukkan $M\cap N\neq \emptyset$.
   Karena M,N ideal dari R, maka $0\in M$ dan $0 \in N$.
   Akibatnya $0\in M\cap N$.
   $\therefore M\cap N\neq \emptyset$.

3. Ambil $x,y\in M\cap N$. Akan ditunjukkan $x+y\in M\cap N$.
   Karena $x,y\in M\cap N$, maka $x,y\in M$ dan $x,y\in N$.
   Karena $x,y\in M$ dan M suatu ideal dari R, maka $x+y \in M$.................... $(*)$
   Karena $x,y\in N$ dan N suatu ideal dari R, maka $x+y\in N$....................$(**)$
   Dari $(*)$ dan $(**)$ diperoleh $x+y\in M\cap N$
4. Ambil $x\in M\cap N$. Akan ditunjukkan $-x\in M\cap N$.
   Karena $x\in M\cap N$ maka $x\in M$ dan $x\in N$.
   Karena $x\in M$ dan M ideal dari R, maka $-x\in M$................$(*)$
   Karena $x\in N$ dan N ideal dari R, maka $-x\in N$ .... $(**)$
   Dari $(*)$ dan $(**)$diperoleh $-x\in M\cap N$.
5. Ambil $x\in M\cap N$ dan $r\in R$. Akan ditunjukkan :
   $(i) x\cdot r\in M\cap N$
   (ii) $r\cdot x\in M\cap N$
   Karena $x\in M\cap N$, maka $x\in M$ dan $x\in N$.
   (i) Karena $x\in M$ dan $r\in R$ dan M suatu ideal dari R, maka $x\cdot r\in M$ …$(*)$
   Karena $x\in N$ dan $r\in R$ dan N suatu ideal dari R, maka $x\cdot r \in N$ .... $(**)$
   Dari $(*)$ dan $(**)$ diperoleh $x\cdot r\in M\cap N$.
   (ii)Karena $x\in M$ dan $r\in R$ dan M suatu ideal dari R, maka
   $r\cdot x \in M$ ……….$(***)$
   Karena $x\in N$ dan $r\in R$ dan N suatu ideal dari R, maka
   $r\cdot x \in N$ ……..$(****)$
   Dari $(***)$ dan $(****)$ diperoleh $r\cdot x\in M\cap N$.

Karena 1,2,3,4,dan 5 maka $M\cap N$ suatu ideal dari R.

Contoh 1 (Soal no. 6 Hal 135)

Misalkan $(R,+,\cdot)$ suatu ring dan U,V suatu ideal dari R, akan ditunjukan $UV = \{u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n \mid u_i \in U, v_i \in V, n \in N\}$ juga ideal dari R

Jawab:

1. Ambil $x \in UV$. Akan ditunjukan $x \in R$

Karena $x \in UV$ dan $UV = \{u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n \mid u_i \in U, v_i \in V, n \in N\}$ maka $x = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_kb_k$ untuk suatu $a_i \in U$, $b_i \in V$, $k \in N$

Karena $a_i \in U$, $b_i \in V$ dan U,V ideal dari R maka $a_i, b_i \in R$; $i = 1,2, \dots, k$

Karena $a_i, b_i \in R$ dan R suatu ring maka $a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_kb_k \in R$

Jadi, $x \in R$

2. Akan ditunjukan $UV \neq \emptyset$

Karena U,V suaru ideal dari R maka $0 \in U\ dan\ 0 \in V\ maka\ 0{,}0 \in uv$

Jadi, $UV \neq \emptyset$

3. Ambil $x, y \in UV, Adt\ x + y \in UV$

Karena $x, y \in UV$dan $UV = \{u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n \mid u_i \in U, v_i \in V, n \in N\}$ maka $x = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_kb_k$ untuk suatu $a_i \in U$, $b_i \in V$, $k \in N$
Dan $y = c_1d_1 + c_2d_2 + \cdots + c_ld_l$ untuk suatu $c_i \in U$, $d_i \in V$, $l \in N$
perhatikan bahwa $x + y = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_kb_k + c_1d_1 + c_2d_2 + \cdots + c_ld_l$

Karena $a_i, c_i \in U$, $b_i, d_i \in V$, $k, l \in N$ maka $x + y = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_kb_k + c_1d_1 + c_2d_2 + \cdots + c_ld_l \in UV$

Jadi, $x + y \in UV$

4. Ambil $x \in UV$. Akan ditunjukan terdapat $-x \in UV$

Karena $x \in UV$ dan $UV = \{u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n \mid u_i \in U, v_i \in V, n \in N\}$

Maka $x = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_kb_k$ untuk suatu $a_i \in U$, $b_i \in V$, $k \in N$

Perhatikan bahwa

$$-x = -(a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_kb_k)$$

$$= (-(a_1b_1)) + (-(a_2b_2)) + \cdots + (-(a_kb_k))$$

$$= (-a_1)b_1 + (-a_2)b_2 + \cdots + (-a_k)b_k)$$

Karena $a_i \in U$ dan U suatu ideal dari R maka $-a_i \in U; i = 1,2, \dots, k$

Jadi, $-x \in UV$

5. Karena $x \in UV$ dan $r \in R$. akan ditunjukan $(i)\ x.r \in UV$, $(ii)\ r.x \in UV$

Karena $x \in UV$ dan $UV = \{u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n \mid u_i \in U, v_i \in V, n \in N\}$

Maka $x = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_kb_k$ untuk suatu $a_i \in U, b_i \in V, k \in N$

Perhatikan bahwa

$(i)\ x.r = (a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_kb_k)r$

$= (a_1b_1)r + (a_2b_2)r + \cdots + (a_kb_k)r$

$= a_1(b_1r) + a_2(b_2r) + \cdots + a_k(b_kr)$

Karena $b_i \in V, r \in R$ dan V suatu ideal dari R maka $b_i, r \in V; i = 1,2, \dots, k$

Tulis $a = b_i.r \in V; i = 1,2, \dots, k$

Akibatnya $x.r = a_1c_1 + a_2c_2 + \cdots + a_kc_k \in UV$

$(ii)\ r.x = r(a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_kb_k)$

$= r(a_1b_1) + r(a_2b_2) + \cdots + r(a_kb_k)$

$= (ra_1)b_1 + (ra_2)b_2 + \cdots + (ra_k)b_k$

Karena $a_i \in U, r \in R$ dan U suatu ideal dari R maka $a_i, r \in U; i = 1,2, \dots, k$

Tulis $d_i = r.a_i \in U; i = 1,2, \dots, k$

Akibatnya $r.x = d_1b_1 + d_2b_2 + \cdots + d_kb_k \in UV$

Karena 1,2,3,4,5 maka UV suatu ideal dari R

Definisi 34

Misalkan D suatu daerah integral.

Lapangan $F = \{\ [a, b] \dashv \mid a, b \in D\ \}$ disebut lapangan kosient atau lapangan hasil bagi

Contoh 2 (Soal no 10 halaman 130)

Misalkan (D,+, .) suatu ring komutatif.

Akan ditunjukkan D daerah integral jika dan hanya jika setiap a,b,c∈D,

a≠0 dengan a . b=a . c berlaku b=c.

(→)

Misalkan D suatu daerah integral akan ditunjukkan setiap a,b,c∈D, a≠0 dengan a . b=a . c berlaku b=c.

Ambil a,b,c∈D, a≠0 dengan a . b=a . c akan ditunjukkan b=c.

Perhatikan bahwa:

$$a \cdot b = a \cdot c$$

$$a.b-a.c = 0$$

$$a(b-c) = 0$$

Karena a,(b-c) ∈D, a(b-c) = 0, a≠0, dan D daerah integral maka b-c=0 atau b=c.

(←)

Misalkan setiap a,b,c∈D, a≠0 dengan a . b=a . c berlaku b=c.

Akan ditunjukka D daerah integral yaitu dengan menunjukkan setiap x,y∈D dengan x≠0 dan x . y = 0 berlaku y=0.

Ambil x,y∈D dengan x≠0 dan x . y = 0 akan ditunjukkan y=0.

Perhatikan bahwa :

x . y = 0

x . 0 = 0

Jadi, x . y = x . 0

Karena $x \neq 0$ dan x . y = x . 0 maka berdasarkan premis di peroleh y=0.

Contoh 3

Misalkan $(R, +, \cdot)$ suatu ring dan U, V suatu ideal dari R.

Tulis $\mathrm{U} + \mathrm{V} = \{\mathrm{u} + \mathrm{v} \mid \mathrm{u} \in \mathrm{U}, \mathrm{v} \in \mathrm{V}\}$

Akan ditunjukkan U+V suatu ideal dari R

Jawab:

1. Ambil $x \in U + V$. Akan ditunjukan $x \in R$

Karena $x \in U + V$ dan $U + V = \{\mathrm{u} + \mathrm{v} \mid \mathrm{u} \in \mathrm{U}, \mathrm{v} \in \mathrm{V}\}$ maka $x = u_1 + v_1$ untuk suatu $u_1 \in U$, $v_1 \in V$.

Karena $u_1 \in U$, $v_1 \in V$ dan U,V ideal dari R maka $U \subseteq R$ dan $V \subseteq R$

Karena $u_1 \in U$ dan $U \subseteq R$ maka $u_1 \in R$

Karena $v_1 \in V$ dan $V \subseteq R$ maka $v_1 \in R$

Karena $u_1, v_1 \in R$ dan R suatu ring maka $x = u_1 + v_1 \in R$

Jadi, $U + V \in R$

2. Akan ditunjukan $U + V \neq \emptyset$.Karena U,V suaru ideal dari R maka (U,+),(V,+) suatu grup.

Akibatnya $0 \in U$ dan $0 \in V$ $maka$ $0 = 0 + 0 \in U + V$

Jadi, $U + V \neq \emptyset$

3. Ambil $x, y \in U + V, Adt\ x + y \in U + V$

Karena $x, y \in U + V$ dan $U + V = \{u + v \mid u \in U, v \in V\}$ maka $x = u_1 + v_1$ dan $y = u_2 + v_2$ untuk suatu $u_i \in U, v_i \in V, i = 1,2$.
Perhatikan bahwa:

$$\begin{aligned} x + y &= (u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) \\ &= u_1 + (v_1 + u_2) + v_2 \\ &= u_1 + (u_2 + v_1) + v_2 \text{ (Karena R suatu ring)} \\ &= (u_1 + u_2) + (v_1 + v_2) \end{aligned}$$

Karena $u_1, u_2 \in U$, dan U suatu ideal maka $u_1 + u_2 \in U$

Karena $v_1, v_2 \in V$, dan V suatu ideal maka maka $v_1 + v_2 \in V$

Misalkan $u_1 + u_2 = u_3$ dan $v_1 + v_2 = v_3$ untuk suatu $u_3 \in U$ dan $v_3 \in V$ maka

$$\begin{aligned} x + y &= (u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) \\ &= u_3 + v_3 \in U + V \end{aligned}$$

4. Ambil $x \in U + V$. Akan ditunjukan terdapat $-x \in U + V$

Karena $x \in U + V$ dan $U + V = \{u + v \mid u \in U, v \in V\}$ maka $x = u_1 + v_1$ untuk suatu suatu $u_1 \in U, v_1 \in V$.

Pilih $-x = -u_1 + -v_1$, adt $-x \in U + V$.

Karena $u_1 \in U$ dan U suatu ideal dari R maka $-u_1 \in U$

Karena $v_1 \in V$ dan V suatu ideal dari R maka $-v_1 \in V$

Misalkan $-u_1 = u_2, -v_1 = v_2$ untuk suatu $u_2 \in U$, $v_2 \in V$ maka

$$-x = -u_1 + -v_1 = u_2 + v_2 \in U + V$$

Karena 1,2,3,dan 4 maka $U + V$ subgrup dari R ...(*)

5. Karena $x \in U + V$ dan $y \in R$. akan ditunjukan (i) $x.y \in U + V$, (ii) $y.x \in U + V$

Karena $x \in U + V$ dan $U + V = \{u + v \mid u \in U, v \in V\}$

Maka $x = u_1 + v_1$ untuk suatu $u_1 \in U$, $v_1 \in V$

Perhatikan bahwa

$$x.y = (u_1 + v_1)y = u_1y + v_1y$$

$$y.x = y(u_1 + v_1) = yu_1 + yv_1$$

Karena $u_1 \in U$, $y \in R$ dan U suatu ideal dari R maka $u_1.y, y.u_1 \in$

Karena $v_1 \in V$, $y \in R$ dan V suatu ideal dari R maka $v_1.y, y.v_1 \in V$

Misalkan $u_1.y = u_2$ untuk suatu $u_2 \in U$ dan $v_1.y = v_2$ untuk suatu $v_2 \in V$

Misalkan $y.u_1 = u_3$ untuk suatu $u_3 \in U$ dan $y.v_1 = v_3$ untuk suatu $v_3 \in V$

Maka $x.y = u_1y + v_1y = u_2 + v_2 \in U + V$

$$y.x = yu_1 + yv_1 = u_3 + v_3 \in U + V \ \ldots.(**)$$

Karena (*) dan (**) maka $U + V$ suatu ideal dari R

Cntoh 4

Periksa apakah G= $\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \mid a \in R\}$

Memebentuk lapangan terhadap operasi penjumlahan dan perkalian matriks

Jawab:

1. Ambil $x, y \in G$ akan ditunjukkan $x + y \in G$

Karena $x, y \in G$ dan G=$\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \mid a \in R\}$ maka x=$\begin{pmatrix} a1 & 0 \\ 0 & a_1 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} a2 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}$ untuk suatu $a_i \in R, i = 1,2$.

Perhatikan bahwa:

$$x+y=\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} a_1+a_2 & 0 \\ 0 & a_1+a_2 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} a_3 & 0 \\ 0 & a_3 \end{pmatrix} \text{ untuk suatu } a_3 = a_1 + a_2 \in R$$

$\therefore x+y \in G$

2. Ambil $x, y \in G$ akan ditunjukkan $x+y=y+x$

   Karena $x, y \in G$ dan G=$\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \mid a \in R\}$ maka

   x=$\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_1 \end{pmatrix}$, $y=\begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}$ untuk suatu $a_i \in R, i = 1,2$.

   Perhatikan bahwa:

$$x+y=\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} a_1+a_2 & 0 \\ 0 & a_1+a_2 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} a_2+a_1 & 0 \\ 0 & a_2+a_1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_1 \end{pmatrix}$$

$$=y+x$$

   $\therefore x+y=y+x$

3. Ambil $x, y, z \in G$ akan ditunjukkan (x+y)+z=x+(y+z)

   Karena $x, y, z \in G$ dan G=$\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \mid a \in R\}$ maka

   x=$\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_1 \end{pmatrix}$, $y=\begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}$, $z=\begin{pmatrix} a_3 & 0 \\ 0 & a_3 \end{pmatrix}$ untuk suatu $a_i \in R, i = 1,2,3$.

Perhatikan bahwa:

$$(x + y) + z = \left[\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}\right] + \begin{pmatrix} a_3 & 0 \\ 0 & a_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & 0 \\ 0 & a_1 + a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_3 & 0 \\ 0 & a_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (a_1 + a_2) + a_3 & 0 \\ 0 & (a_1 + a_2) + a_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 + (a_2 + a_3) & 0 \\ 0 & a_1 + (a_2 + a_3) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 + a_3 & 0 \\ 0 & a_2 + a_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_1 \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_3 & 0 \\ 0 & a_3 \end{pmatrix}\right]$$

$$= x + (y + z)$$

$\therefore (x + y) + z = x + (y + z)$

4. Ambil $x \in G$ akan ditunjukkan $x + 0 = x$ (0 disebut unsur identitas terhadapoperasi +)

Karena $x \in G$ dan $G=\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \mid a \in R\}$ maka $x=\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_1 \end{pmatrix}$ untuk suatu $a_1 \in R$

Perhatikan bahwa:

$$X + 0 = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 + 0 & 0 \\ 0 & a_1 + 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_1 \end{pmatrix}$$

$= x$

$\therefore x + 0 = 0$

5. Ambil $x \in G$ dan $y \in G$ akan ditunjukkan x+y=0

   Karena $x \in G$ dan $G = \{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} | \ a \in R\}$

Maka $x = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_1 \end{pmatrix}$ untuk suatu $a_1 \in R$

Pilih $y = \begin{pmatrix} -a_1 & 0 \\ 0 & -a_1 \end{pmatrix}$

Karena $a_1 \in R$ maka $-a_1 \in R$

Perhatikan bahwa:

$$\begin{aligned} x + y &= \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a_1 & 0 \\ 0 & -a_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_1 + (-a_1) & 0 \\ 0 & a_1 + (-a_1) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$\therefore x+y=0$

6. Ambil $x, y \in G$ akan ditunjukkan $x\,.\,y \in G$

   Karena $x, y \in G$ dan G=$\left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \middle| \, a \in R\right\}$ maka x=$\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_1 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}$ untuk suatu $a_i \in R, i = 1,2$.

   Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} x.y &= \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_1a_2 & 0 \\ 0 & a_1a_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_3 & 0 \\ 0 & a_3 \end{pmatrix} \text{ untuk suatu } a_3 = a_1 + a_2 \in R \end{aligned}$$

   $\therefore x.y \in G$

7. Ambil $x, y, z \in G$ akan ditunjukkan (x.y).z=x.(y.z)

   karena $x, y, z \in G$ dan $G = \left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \middle| a \in R\right\}$ maka

   $x = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_1 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}, z = \begin{pmatrix} a_3 & 0 \\ 0 & a_3 \end{pmatrix}$

   untuk suatu $a_i \in R, i = 1,2,3$.

Perhatikan bahwa:

$$x.(y.z) = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_1 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_3 & 0 \\ 0 & a_3 \end{pmatrix} \right]$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 a_3 & 0 \\ 0 & a_2 a_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_1(a_2 a_3) & 0 \\ 0 & a_1(a_2 a_3) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (a_1 a_2) a_3 & 0 \\ 0 & (a_1 a_2) a_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 a_2 & 0 \\ 0 & a_1 a_2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a_3 & 0 \\ 0 & a_3 \end{pmatrix}$$

$$= \left[\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} a_3 & 0 \\ 0 & a_3 \end{pmatrix}$$

=(x.y).z

$\therefore x.(y.z) = (x.y).z$

8. Ambil $x, y, z \in G$ akan ditunjukkan (i) $x.(y+z) = xy + xz$

(ii) $(x+y).z = xz + yz$

Karena $x, y, z \in G$ dan $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \middle| a \in R \right\}$ maka

$x = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_1 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}$, $z = \begin{pmatrix} a_3 & 0 \\ 0 & a_3 \end{pmatrix}$ untuk suatu $a_i \in R, i = 1,2,3$.

Perhatikan bahwa:

$$\text{(i) } x.(y+z) = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_1 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_3 & 0 \\ 0 & a_3 \end{pmatrix} \right]$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 + a_3 & 0 \\ 0 & a_2 + a_3 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} a_1(a_2 + a_3) & 0 \\ 0 & a_1(a_2 + a_3) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} a_1 a_2 + a_1 a_3 & 0 \\ 0 & a_1 a_2 + a_1 a_3 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} a_1 a_2 & 0 \\ 0 & a_1 a_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 a_3 & 0 \\ 0 & a_1 a_3 \end{pmatrix}$$
$$= \left[\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}\right] + \left[\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_3 & 0 \\ 0 & a_3 \end{pmatrix}\right]$$

$$= x.y + x.z$$

$$\therefore x.(y + z) = xy + xz$$

(ii) $(x + y).z = \left[\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}\right] \begin{pmatrix} a_3 & 0 \\ 0 & a_3 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & 0 \\ 0 & a_1 + a_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_3 & 0 \\ 0 & a_3 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} (a_1 + a_2)a_3 & 0 \\ 0 & (a_1 + a_2)a_3 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} a_1 a_3 + a_2 a_3 & 0 \\ 0 & a_1 a_3 + a_2 a_3 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} a_1 a_3 & 0 \\ 0 & a_1 a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2 a_3 & 0 \\ 0 & a_2 a_3 \end{pmatrix}$$
$$= \left[\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_3 & 0 \\ 0 & a_3 \end{pmatrix}\right] + \left[\begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_3 & 0 \\ 0 & a_3 \end{pmatrix}\right]$$
$$= x.z + y.$$
$$\therefore (x + y).z = xz + yz$$

9. Ambil $x, y \in G$ akan ditunjukkan $x \,.\, y = y \,.\, x$

Karena $x, y \in G$ dan G=$\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} | \, a \in R\}$

maka x=$\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_1 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}$ untuk suatu $a_i \in R, i = 1,2$.

Perhatikan bahwa:

$$x.y = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} a_1 a_2 & 0 \\ 0 & a_1 a_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_2 a_1 & 0 \\ 0 & a_2 a_1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a2 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a1 & 0 \\ 0 & a_1 \end{pmatrix}$$

$$= y.x$$

$\therefore x.y = y.x$

10. Ambil $x \in G$ ada $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$ akan ditunjukkan $x.\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = x$

Karena $x \in G$ dan G={$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$| $a \in R$}

Maka x=$\begin{pmatrix} a1 & 0 \\ 0 & a_1 \end{pmatrix}$ untuk suatu $a \in R$

Perhatikan bahwa:

$$x.\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_1 \end{pmatrix}$$
$$= x$$

11. Ambil $x \in G$ dengan $x \neq 0$ ada $y \in R$ sedemikian sehingga $x.y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Karena $x \in G$ dan $G = \{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} | \; a \in R\}$

Maka $x = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a1 \end{pmatrix}$ untuk suatu $a_1 \in R$ dengan $a_1 \neq 0$

Pilih $y = \begin{pmatrix} 1/a1 & 0 \\ 0 & 1/a_1 \end{pmatrix}$

Karena $a_1 \neq 0$ maka $1/a_1 \neq 0$ dan

$$x.y = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1/a_1 & 0 \\ 0 & 1/a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore x.y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Karena 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10 dan 11 maka G membentuk lapangan terhadap operasi penjumlahan dan perkalian matriks