

BESARAN SKALAR & VEKTOR

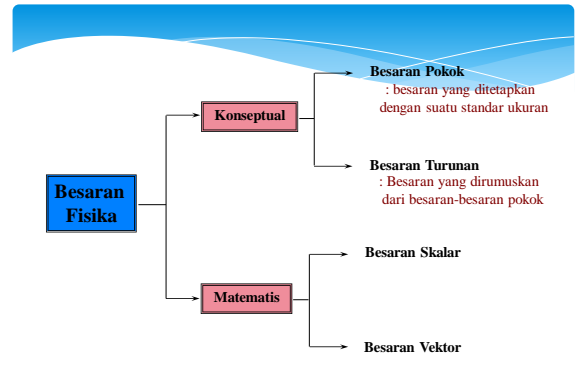


FIGURE 13.12 Spanish archer Antonio Rebollo lights the Olympic torch in Barcelona with a flaming arrow.

3

BESARAN

Skalar

besaran yang hanya memiliki besar (panjang/nilai)

massa, waktu, suhu, panjang, luas, volum, energi

Catatan : skalar tidak tergantung sistem koordinat
vektor tergantung sistem koordinat

Vektor

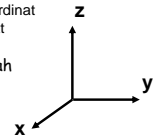
memiliki besar dan arah

kecepatan, percepatan, gaya, momentum, medan magnet, medan listrik

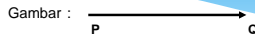
Vektor direpresentasikan dengan simbol anak panah



4



PENGAMBARAN DAN PENULISAN (NOTASI) VEKTOR



Gambar : \overrightarrow{PQ}
 Titik P : Titik pangkal vektor
 Titik Q : Ujung vektor
 Tanda panah : Arah vektor
 Panjang PQ = $|\overrightarrow{PQ}|$: Besarnya (panjang) vektor

Notasi Vektor

\vec{A} → Huruf tebal
 \vec{A} → Pakai tanda panah di atas

Besar vektor $A = |\vec{A}|$
 (pakai tanda mutlak) = A
 (Huruf miring)

Catatan :

a. Dua vektor sama jika arah dan besarnya sama



b. Dua vektor dikatakan tidak sama jika :

1. Besar sama, arah berbeda



2. Besar tidak sama, arah sama



3. Besar dan arahnya berbeda



2.3 OPERASI MATEMATIK VEKTOR

1. Operasi jumlah dan selisih vektor
2. Operasi kali

2.3.1 JUMLAH DAN SELISIH VEKTOR

Metode :

1. Jajaran Genjang
2. Segitiga
3. Poligon (segi banyak)
4. Uraian



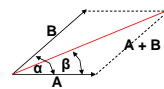
θ adalah sudut yang dibentuk oleh vektor A dan B

$R = A + B$

Besarnya vektor $R = |\vec{R}| = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB \cos \theta}$

Besarnya vektor $A+B = R = |\vec{R}| = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB \cos \theta}$

Besarnya vektor $A-B = S = |\vec{S}| = \sqrt{A^2 + B^2 - 2AB \cos \theta}$



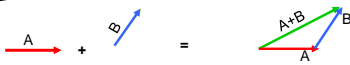
$\frac{|A+B|}{\sin \alpha} = \frac{|A|}{\sin(\alpha - \beta)} = \frac{|B|}{\sin \beta}$

β : arah vektor hasil penjumlahan

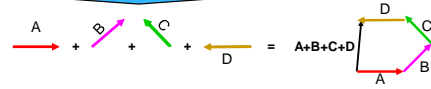
- Jika vektor A dan B searah $\rightarrow \theta = 0^\circ : R = A + B$
- Jika vektor A dan B berlawanan arah $\rightarrow \theta = 180^\circ : R = A - B$
- Jika vektor A dan B saling tegak lurus $\rightarrow \theta = 90^\circ : R = 0$

Catatan : Untuk Selisih (-) arah Vektor di balik

2. Segitiga

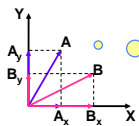


3. Poligon (Segi Banyak)



4. Uraian

Vektor diuraikan atas komponen-komponennya (sumbu x dan sumbu y)



$$A = A_x \cdot i + A_y \cdot j ; B = B_x \cdot i + B_y \cdot j$$

$$A_x = A \cos \theta ; B_x = B \cos \theta$$

$$A_y = A \sin \theta ; B_y = B \sin \theta$$

Besar vektor $A + B = |A+B| = |R|$ $R_x = A_x + B_x$ $R_y = A_y + B_y$

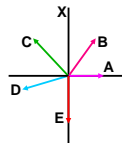
$$|R| = |A + B| = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$$

Arah Vektor R (terhadap sb.x positif) = $\text{tg } \theta = \frac{R_y}{R_x}$

$$\theta = \text{arc tg } \frac{R_y}{R_x}$$

Contoh Soal

1. Lima buah vektor digambarkan sebagai berikut :



Besar dan arah vektor pada gambar di samping :

Vektor	Besar (m)	Arah (°)
A	19	0
B	15	45
C	16	135
D	11	207
E	22	270

Hitung : Besar dan arah vektor resultan.

Jawab :

Vektor	Besar (m)	Arah(°)	Komponen X(m)	Komponen Y (m)
A	19	0	19	0
B	15	45	10.6	10.6
C	16	135	-11.3	11.3
D	11	207	-9.8	-5
E	22	270	0	-22
		R	$R_x = 8.5$	$R_y = -5.1$

Besar vektor R : $\sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{8.5^2 + (-5.1)^2} = \sqrt{94.01} = 9.67 \text{ m}$

Arah vektor R terhadap sumbu x positif :

$$\text{tg } \theta = \frac{-5.1}{8.5} = -0.6$$

$\theta = 329.03^\circ$ (terhadap x berlawanan arah jarum jam)

PERKALIAN VEKTOR

1. Perkalian Skalar dengan Vektor
2. Perkalian vektor dengan Vektor
 - a. Perkalian Titik (Dot Product)
 - b. Perkalian Silang (Cross Product)

1. Perkalian Skalar dengan Vektor Hasilnya vektor

$C = k \cdot A$ k : Skalar
 A : Vektor

Vektor C merupakan hasil perkalian antara skalar k dengan vektor A

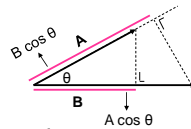
- Catatan :**
- Jika k positif arah C searah dengan A
 - Jika k negatif arah C berlawanan dengan A



2. Perkalian Vektor dengan Vektor

a. Perkalian Titik (Dot Product) Hasilnya skalar

$A \cdot B = C$ $C = \text{skalar}$



Besarnya : $C = |A||B| \cos \theta$
 $A = |A| = \text{besar vektor A}$
 $B = |B| = \text{besar vektor B}$
 $\theta = \text{sudut antara vektor A dan B}$



Sifat-sifat Perkalian Titik (Dot Product)

1. Komutatif : $A \cdot B = B \cdot A$
2. Distributif : $A \cdot (B+C) = (A \cdot B) + (A \cdot C)$

Catatan :

1. Jika A dan B saling tegak lurus $\rightarrow A \cdot B = 0$
2. Jika A dan B searah $\rightarrow A \cdot B = A \cdot B$
3. Jika A dan B berlawanan arah $\rightarrow A \cdot B = -A \cdot B$



Contoh:

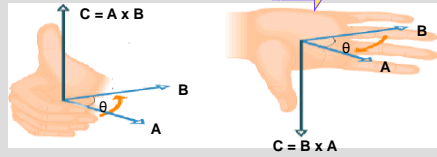
Usaha (W) yang dilakukan oleh gaya F untuk memindahkan benda sejauh s didefinisikan sebagai $W = F \cdot s$.
 Jika besar gaya $F = 5 \text{ N}$, perpindahan $s = 40 \text{ m}$ dan gaya F membentuk sudut 60° , maka hitung besar usaha W.

Jawab:

$W = F \cdot s$
 $W = F s \cos \theta$
 $W = 5 \text{ N} \cdot 40 \text{ m} \cos 60^\circ = 5 \text{ N} \cdot 40 \text{ m} \cdot 0,5$
 $W = 100 \text{ N m} = 100 \text{ Joule}$



b. Perkalian Silang (Cross Product)



Catatan :
 Arah vektor C sesuai aturan tangan kanan
 Besarnya vektor $C = A \times B = AB \sin \theta$

Sifat-sifat :

1. Tidak komutatif $\rightarrow A \times B \neq B \times A$
2. Jika A dan B saling tegak lurus $\rightarrow A \times B = B \times A$
3. Jika A dan B searah atau berlawanan arah $\rightarrow A \times B = 0$

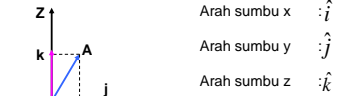


VEKTOR SATUAN

Vektor yang besarnya satu satuan

Notasi $\hat{A} = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|}$ $\hat{A} = \frac{|\vec{A}|}{|\vec{A}|} = 1$ Besar Vektor

Dalam koordinat Cartesian (koordinat tegak)



Arah sumbu x : \hat{i}
 Arah sumbu y : \hat{j}
 Arah sumbu z : \hat{k}

$\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}$

Perpindahan 5 m pada arah x dituliskan sebagai $\vec{d} = 5 \hat{i}$

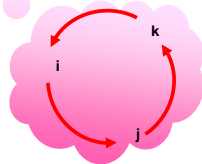


> Sifat-sifat Perkalian Titik (Dot Product) Vektor Satuan

$i \cdot i = j \cdot j = k \cdot k = 1$
 $i \cdot j = j \cdot k = k \cdot i = 0$

> Sifat-sifat Perkalian silang (Cross Product) Vektor Satuan

$i \times i = j \times j = k \times k = 0$
 $i \times j = k$
 $j \times k = i$
 $k \times i = j$



1. Diketahui koordinat titik A adalah (2, -3, 4). Tuliskan dalam bentuk vektor dan besar vektornya ?

Jawab :

Vektor $A = 2i - 3j + 4k$

$A = |\vec{A}| = \sqrt{2^2 + (-3)^2 + 4^2} = \sqrt{29}$ satuan

2. $\vec{F} = (2\hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k})\text{N}$ $\vec{s} = (3\hat{i} - 4\hat{j} - 6\hat{k})\text{m}$

$\vec{F} \cdot \vec{s} = 2(3)\text{N} \cdot \text{m} + 3(-4)\text{N} \cdot \text{m} + (-2)(-6)\text{N} \cdot \text{m}$

$\vec{F} \cdot \vec{s} = 6\text{N} \cdot \text{m}$



$$\vec{F} = (2\hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k})\text{N} \quad \vec{r} = (3\hat{i} - 4\hat{j} - 6\hat{k})\text{m}$$

$$\vec{\tau} = (\vec{r} \times \vec{F})$$

$$\begin{aligned} \vec{\tau} &= (2\text{N})(3\text{m})(\hat{i} \times \hat{i}) + (2\text{N})(-4\text{m})(\hat{i} \times \hat{j}) + (2\text{N})(-6\text{m})(\hat{i} \times \hat{k}) \\ &\quad + (3\text{N})(3\text{m})(\hat{j} \times \hat{i}) + (3\text{N})(-4\text{m})(\hat{j} \times \hat{j}) + (3\text{N})(-6\text{m})(\hat{j} \times \hat{k}) \\ &\quad + (-2\text{N})(3\text{m})(\hat{k} \times \hat{i}) + (-2\text{N})(-4\text{m})(\hat{k} \times \hat{j}) + (-2\text{N})(-6\text{m})(\hat{k} \times \hat{k}) \end{aligned}$$

$$\vec{\tau} = (26\hat{i} - 6\hat{j} + 17\hat{k})\text{N} \cdot \text{m}$$

$$\begin{vmatrix} \hat{j} & \hat{k} \\ -4 & -6 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} \\ 3 & -4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \hat{k} & \hat{i} \\ -6 & 3 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} \vec{\tau} &= (-4(-2) - (3)(-6))\hat{i} \\ &\quad + (-6(2) - (3)(-2))\hat{j} \\ &\quad + (3(3) - (2)(-4))\hat{k} \end{aligned}$$

$$\vec{\tau} = (26\hat{i} - 6\hat{j} + 17\hat{k})\text{N} \cdot \text{m}$$

4. Tentukanlah hasil perkalian titik dan perkalian silang dari dua buah vektor berikut ini :

$$\mathbf{A} = 2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$$

Jawab :

Perkalian titik :

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} &= 2 \cdot 1 + (-2)(-3) + 4 \cdot 2 \\ &= 16 \end{aligned}$$

Perkalian silang :

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \times \mathbf{B} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -2 & 4 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} \\ &= \{(-2)(2) - 4(-3)\}\mathbf{i} + \{4(1) - 2(2)\}\mathbf{j} + \{2(-3) - (-2)(1)\}\mathbf{k} \\ &= (-4+12)\mathbf{i} + (4-4)\mathbf{j} + (-6+2)\mathbf{k} \\ &= 8\mathbf{i} + 0\mathbf{j} - 4\mathbf{k} \\ &= 8\mathbf{i} - 4\mathbf{k} \end{aligned}$$